

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кваліфікаційна наукова
робота на правах рукопису

СИПЛИВЕЦЬ ОЛЕКСАНДР ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 624.01:51.001:624.131

ДИСЕРТАЦІЯ
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПІЛЬНОЇ РОБОТИ ПІДПІРНИХ СПОРУД
ТА ГРУНТОВОГО МАСИВУ В УМОВАХ ЩІЛЬНОЇ МІСЬКОЇ ЗАБУДОВИ

05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди»

19 «Архітектура та будівництво»

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О.О. Сипливець

Науковий керівник Гришин Андрій Володимирович, доктор технічних наук,
професор

*Перший примірник дисертації є ідентичним
за змістом зі всіма іншими примірниками*

Учений секретар _____ О. ДРОЖЖИН

ОДЕСА – 2020

АНОТАЦІЯ

Сипливець О. О. Математичне моделювання спільної роботи підпірних споруд і ґрунтового масиву в умовах щільної міської забудови. – Кваліфікаційна наукова робота на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 05.23.01 – «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» (192 – Будівництво та цивільна інженерія). – Одеська державна академія будівництва та архітектури Міністерства освіти і науки України, Одеський національний морський університет Міністерства освіти і науки України, Одеса, 2019.

У дисертаційній роботі розглянуто задачі, пов'язані з математичним моделюванням спільної роботи підпірних споруд і ґрунтового масиву в умовах щільної міської забудови.

У **вступі** наведено обґрунтування вибору теми дослідження, визначено мету і задачу роботи, представлена коротка характеристика досліджень та їхній зв'язок із науковими програмами, сформульовані наукова новизна й практичне значення роботи, дана загальна характеристика дисертації.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

Вперше:

- використана нова розширена модель підпірної споруди, яка дозволяє найбільш точно визначати її напружено-деформований стан і давати оцінку деформування та можливості руйнування поруч розташованих і проєктованих споруд;

- у розрахунках вперше враховуються пружно-пластичні деформації всіх елементів моделі підпірної споруди і поруч розташованих споруд, які часто значно перевершують пружні;

- враховується послідовність етапів навантаження системи відповідно до технології будівництва підпірних споруд для більш точного визначення їхнього напружено-деформованого стану;

- за результатами вирішень, які задовільно підтверджуються

експериментальними даними, встановлено основні закономірності та особливості деформування розглянутих нелінійних систем в умовах складного їхнього навантаження з урахуванням фізико-механічних властивостей ґрунтів та матеріалів конструкцій.

Вдосконалено:

- програмний комплекс PLASTICA шляхом розробки та налагодження ряду підпрограм (умова Писаренка-Лебедева, поліпшений інтерфейс користувача щодо введення вихідних даних і виведення результатів розрахунку), що дозволило отримувати результати рішення у вигляді таблиць, схем, ізополів і епюр.

Отримало подальший розвиток:

- метод розв’язання контактних задач розглядаємої системи і раніше побудованих або проєктованих поруч споруд та дослідження на основі цього напружено-деформованого стану сумісної роботи підпірних споруд та ґрунтової основи чи протизсувних споруд схилів.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено огляд вітчизняних і зарубіжних літературних джерел, зроблено критичний аналіз опублікованих робіт в області математичного моделювання спільної роботи підпірних споруд і ґрунтового масиву при дії статичних навантажень. Розглянуто особливості застосування математичного моделювання для досліджуваних систем та фізико-механічні властивості ґрунтів, бетонів і металів при їхньому складному навантаженні.

З огляду вітчизняних і зарубіжних джерел встановлено, що значний внесок у розвиток методів розрахунку та дослідження напружено-деформованого стану підпірних споруд і ґрунтового масиву внесли роботи: А.Я. Будіна, В.А. Волосухина, В.А. Гришина, Н.Б. Гуревича, Б.В. Дідуха, Р.А. Діброви, М.П. Дубровського, Л.М. Ємельянова, Г.К. Клейна, С.Ф. Клованича, Г.Є. Лазебника, Н.В. Лубенова, І.Я. Лучковського, Т. Накаї, Д.Р. Овена, О.О. Петракова, В.Н. Ренгача, К. Сахени, М.К. Снітко, А.Н. Тетиора, Е. Хінтона, З.В. Цагарелі, Ф.М. Шихієва, С. Юфіна, П.І. Яковлєва та ін.

Представлені дані вітчизняних і зарубіжних авторів показали, що наразі відсутні дослідження розширених моделей розглянутих у роботі систем з

урахуванням реальних властивостей матеріалів конструкцій і ґрунтів, а також їхньої спільної роботи в умовах складного навантаження. Слід також звернути увагу на вирішення наступних особливо важливих проблем при математичному моделюванні підпірних споруд:

1. Модель підпірної споруди повинна включати в себе, як єдину систему, наступні елементи: 1) безпосередньо підпірну конструкцію; 2) розташовану поруч з нею частину ґрунтового масиву; 3) раніше побудовані або проєктовані на даних ґрунтах споруди; 4) підземні води. Така розширена модель системи дозволяє найбільш точно визначати її напружено-деформований стан і вирішувати питання руйнування або деформування поруч розташованих і проєктованих споруд.

2. У розрахунках необхідно враховувати роботу елементів моделі підпірної споруди в пружно-пластичному стані. Це викликано тим, що пластичні деформації, які виникають в ній, часто значно перевершують пружні. У зв'язку з цим, така модель повинна бути представлена нелінійними рівняннями, вирішення яких можливе тільки чисельними методами.

3. Напружено-деформований стан підпірних споруд при їхньому пружно-пластичному деформуванні залежить від послідовності етапів навантаження. Тому найбільш точні результати вирішення в припущеннях отримуються при обліку послідовності цих етапів, відповідної технології будівництва підпірних споруд.

У **другому розділі** наведена система основних нелінійних рівнянь досліджуваної математичної моделі: геометричні, статичні і фізичні, які залежать від властивостей функції навантаження. Вони описують напружено-деформований стан моделі від дії прикладеного статичного навантаження і застосовані для вирішення даної проблеми. Показано, що функція навантаження повинна володіти певними властивостями, які сформульовані у вигляді трьох умов: початку пластичної течії, закону течії і закону зміцнення.

Наразі не існує єдиної функції навантаження, придатної для різних будівельних матеріалів і ґрунтів. Тому наведені деякі види цих функцій, які експериментально обґрунтовані для певних типів деформівних середовищ.

У **третьому розділі** наведено опис алгоритму і використовуваних програмних

комплексів для чисельної реалізації математичної моделі. Дискретизація області, займаної розширеною моделлю підпірної споруди для плоского завдання, виконана методом скінченних елементів. В якості скінченних елементів прийняті плоскі чотирих-вузлові, восьми-вузлові та дев'яти-вузлові елементи. На межах ґрунтового масиву використовувалися плоскі нескінченні чотири-вузлові, п'яти-вузлові та шести-вузлові елементи.

Побудована скінченно-елементна модель отриманих в розділі 2 нелінійних рівнянь, які визначають математичну модель у дискретних точках підпірної споруди і оточуючих її елементів. Вона є системою нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Розроблено алгоритм вирішення цієї системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, в якому реалізовано ітераційний процес за методом Ньютона-Канторовича, де розроблено необхідну процедуру повернення вектора напруг в область, обмежену функцією навантаження. В якості функцій навантаження використовувалися умови: Кулона-Мора, Боткіна, Мізеса, Тріска-Сен-Венана, Генієва і Писаренка-Лебедева.

Побудований алгоритм рішення реалізований професорами Гришиним В. А. і Гришиним А. В. у вигляді програмного комплексу PLASTICA, написаного на мові Сі#. Автором дисертації написано і налагоджено ряд підпрограм (умова Писаренка-Лебедева, поліпшений інтерфейс користувача щодо введення вихідних даних і виведення результатів розрахунку), які включені в цей комплекс.

Окремі можливості запропонованого алгоритму реалізовано в програмному комплексі PLAXIS.

У **четвертому розділі** наведено приклади чисельної реалізації задач із використанням математичного моделювання в програмному комплексі PLASTICA, що ілюструють теоретичні дослідження, викладені в попередніх розділах і ПК PLAXIS.

У першому прикладі розглядається розрахунок залізобетонних кріплень укосів котловану для триповерхового підземного гаража. Ліворуч від котловану розташована п'ятиповерхова каркасна будівля, а праворуч споруджена залізобетонна плита, на яку додане розподілене навантаження. Фундамент будівлі виконаний також у вигляді плити. На нижньому поверсі триповерхового підземного гаража діє

розподілене навантаження. Розрахунок відбувався за шістьма етапами відповідно до технології виробництва будівельних робіт. Результати розрахунку представлено у вигляді відповідно ізополів повних переміщень, повних і дотичних напруг системи.

Аналіз результатів розрахунку показав, що від дії раніше побудованих споруд і власної ваги ґрунту відбувається його підняття всередині котловану і зменшення з глибиною його ширини. Ліва крайня точка фундаментної плити раніше побудованої зліва від котловану будівлі опустилася після закінчення будівництва додатково на 4 см, а права – тільки на 1 см, тому будівля разом із фундаментною плитою нахиляється вліво. У другому шарі ґрунта поблизу бічних стінок кріплення котловану виникають пластичні деформації.

Вдосконалений програмний комплекс PLASTICA застосовувався як альтернативний розрахунок методу граничних станів для визначення напружено-деформованого стану конструкції та поруч розташованих споруд під час проектування підземного паркінгу розташованого в м. Кропивницький. Територія Кіровоградської області належить до Східноєвропейської платформи, кристалічний фундамент якої утворений протерозойськими метаморфізованими породами: гранітами, гейсами, сланцями. Так як програмний комплекс удосконалений шляхом розширення бібліотеки функцій навантаження Писаренка-Лебедева для скальних ґрунтів, дає можливість застосовувати під час розрахунку об'єкта та отримати об'єктивні результати.

Використовуючи отримані результати розрахунку напружено-деформованого стану моделі, виконано уточнення та коригування конструктивних елементів залізобетонного кріплення стінки котловану та мають економію в товщини стінки, арматурі, витраті труда працівників та техніки, від попередньої проектно-кошторисної документації.

Загальна вартість попереднього розрахунку складало 8 257 156,00 грн. після коригування 7 831 911,00 грн, економія склала 425 245,00 грн.

У другому прикладі розглянуто розрахунок протизсувної споруди. Для вирішення даного завдання застосовувався програмний комплекс PLAXIS, в якому вона може бути реалізована.

Як і в попередньому прикладі, розрахунок здійснювався у послідовних етапах відповідно до технології виробництва будівельних робіт. Результати розрахунку представлено у вигляді відповідно схем повних переміщень і ізополей повних і нормальних напруг.

На завершення слід зазначити, що в прийнятій послідовності розрахунку не виникала втрата стійкості схилу на кожному з п'яти етапів рішення.

У **п'ятому розділі** для оцінки достовірності отриманих результатів проведено їхні порівняння з розрахунками в програмному комплексі PLAXIS, класичним методом Кулона і експериментальними випробуваннями трьох різних авторів (З.В. Цагарелі, П.І. Яковлєвим, Г.Е. Лазебником).

За результатами порівняння в першому прикладі з експериментальними даними, отриманими З.В. Цагарелі в лабораторій підпірних стін Грузінського політехнічного інституту імені В.І.Леніна відзначено, що найбільш близько до експериментальних даних підходить епюра, отримана за розрахунком у програмному комплексі PLASTICA (максимальне відхилення в середній частині стінки становить 4,5%). Наступними подаються дані, отримані в програмному комплексі PLAXIS (максимальне відхилення – 6%). Найбільші відхилення дає розрахунок за Кулоном – 79%.

За результатами порівняння, у другому прикладі з експериментальними даними, отриманими П.І. Яковлєвим в лабораторії інституту гідрології і гідротехніки Академії Наук України котрі проектувалися та будувалися в портах басейну ріки Дніпра на Україні і дніпровських пісках зазначено, що найбільші відхилення нормального тиску піску на вертикальну стінку спостерігаються під розвантажувальною плитою. У цій області дані, отримані з використанням програмних комплексів PLASTICA і PLAXIS, в 2,5 рази більші, в порівнянні з експериментом. Це пояснюється тим, що при малій ширині розвантажувальної плити (14,5 см) і сипучій засипці бічний тиск ґрунту в нижній частині плити при розрахунку відрізняється від нуля, а в умовах експерименту за рахунок усадки піску – дорівнює нулю. Слід також зазначити, що результати розрахунку в програмному комплексі PLAXIS виходять дещо завищеними в порівнянні з PLASTICA і

експериментом.

За результатами порівняння в третьому прикладі з експериментальними даними, отриманими Г.Е. Лазебником в лабораторії Одеського інституту інженерів морського флоту Кафедри «Морські та річкові порти, водних путів та їх технічної експлуатації» відзначено, що найбільші відхилення в епюрах пасивного тиску між експериментальними і розрахунковими в PLASTICA даними спостерігаються в нижній частині стінки і становлять 100%, тобто в два рази, а трохи вище – 9%. Подібна різниця в епюрах активного тиску в області кріплення анкера становить 20%. В епюрах моментів ця різниця становить 23,5% в середній частині стінки. Результати розрахунку в програмному комплексі PLAXIS вийшли дещо завищеними, в порівнянні з експериментальними даними. Найбільші відмінності спостерігаються при порівнянні з результатами, отриманими за класичною теорією Кулона, особливо в епюрі пасивного тиску піску на стіну.

Ключові слова: математичне моделювання, підпірна споруда, протизсувна споруда, ґрунтовий масив, пружно-пластичні деформації, послідовність етапів навантаження, складне навантаження, напружено-деформований стан, система основних нелінійних рівнянь, функція навантаження, алгоритм, програмний комплекс, ізополя повних переміщень і напружень.

ABSTRACT

Siplivets A.A. **Mathematical Modelling of Combined Action of Retaining Structures and Soil Mass in the Conditions of Constrained Urban Site Development.** – Qualifying scientific work published as manuscript.

Dissertation submitted for the degree of a Candidate of Technical Sciences (PhD) in specialty 05.23.01 – “Building Constructions, Buildings and Structures” (192 – Construction and Civil Engineering). – Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa National Maritime University of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Odessa, 2019.

The dissertation research considers the problems related to the mathematical modelling of the combined action of retaining structures and soil mass under the

conditions of constrained urban site development.

Introduction presents the rationale for the choice of the research topic. The objective and tasks of the research are defined and a brief description of the research and its connection with the scientific programmes are presented. The scientific novelty and practical significance of the work are formulated and general characteristics of the thesis are given.

The scientific novelty of the results is as follows:

For the first time:

- A new extended model of a retaining structure was used. The model allows determining the stress-strain state of a retaining structure most accurately and evaluating the deformation of nearby structures and those being designed.
- For the first time, the calculations take into account the elastic-plastic deformations of all the elements of the supporting structure model, which are often much higher than the elastic ones.
- For the first time, the sequence of the stages of loading the system is taken into account in accordance with the technology of construction of retaining structures for a more accurate identification of their stress-strain state.
- According to the results of solving the problems that are positively confirmed by the experimental data, the main regularities and peculiarities of deformation of the considered nonlinear systems under their complex loading have been established.

Improved:

- PLASTICA software complex by developing and debugging a number of subprograms (pisarenko-Lebedev condition, improved user interface for entering source data and output of calculation results), which allowed to obtain the results of the decision in the form of tables, diagrams, isolas and epure.

Received further development:

- method of solving contact problems of the collapsed system and previously built or projected nearby structures and research on the basis of this tense-deformed state of joint operation of retaining structures and soil base or landslide structures of slopes.

Chapter one of the dissertation presents the review of the national and foreign

literary sources. A critical analysis of the published works in the sphere of mathematical modelling of the combined actions of retaining structures and the soil mass under the action of static loads was carried out. The features of the application of mathematical modelling for the studied systems and the physico-mechanical properties of soils, concrete and metals under their complex loading were considered.

After the review of domestic and foreign sources it was established that a significant contribution to the development of methods for calculating and studying the stress-strain state of retaining structures and soil mass was made by: A.Ya. Budin, V.A. Volosukhin, F. Glushilkhin, V.A. Grishin, N.B. Gurevich, B.I. Didukh, G.A. Dubrava, M.P. Dubrovskiy, L.M. Yemelyanov, G.K. Klein, S.F. Klovovich, G.E. Lazebnik, R.V. Lubenov, I.Ya. Luchkovskiy, T. Nakai, D.R. Oven, A.A. Petrakov, V.N. Rengach, K. Sahena, N.K. Snitko, A.N. Tetior, E. Hinton, Z.V. Tsagareli, F.M. Shikhiev, S. Yufin, P.I. Yakovlev and others.

The data presented by domestic and foreign authors have shown that currently there are no studies of extended models of the systems considered in the work, taking into account the real properties of materials of structures and soils, as well as their combined actions under complex loading conditions. Attention should also be paid to the solution of the following important problems in the mathematical modelling of retaining structures:

1. The model of a retaining structure should include, as a uniform system, the following elements: 1) a retaining structure itself; 2) the part of soil mass located next to it; 3) earlier constructed or designed structures on this soil; 4) groundwater. Such an extended model makes it possible to most accurately determine the stress-strain state and solve problems of destruction or deformation of the closely located and designed structures.
2. The calculations should take into account the operation of the elements of the model of the supporting structure in the elastic-plastic state. This is due to the fact that the plastic deformations often exceed the elastic ones. In this regard, such a model should be represented by non-linear equations, the solution of which is possible only by numerical methods.
3. The stress-strain state of the retaining structures during their elastic-plastic deformation

depends on the sequence of loading stages. Therefore, the most accurate results for the solution in increments are obtained when taking into account the sequence of these stages, which correspond to the technology of construction of retaining structures.

Chapter two presents the system of basic nonlinear equations of the mathematical model under study: geometric, static, and physical depending on the properties of the loading function. They describe the stress-strain state of the model from the effect of the applied static loading and are applicable to solve the studied problem. It is shown that the loading function must have certain properties, which are formulated in the form of the three conditions: the beginning of plastic flow, the law of flow, and the law of hardening.

Currently, there is no uniform loading function applicable to various building materials and soils. Therefore, some types of these functions are given that are experimentally grounded for certain types of deformable media.

Chapter three describes the algorithm and the software systems used for the numerical implementation of the mathematical model. The digitalization of the area used by the extended model of the retaining structure for the two dimensional problem was performed by the finite element method. The finite elements are flat four-node, eight-node and nine-node elements. At the boundaries of the soil mass we used flat infinite four-node, five-node and six-node elements.

A finite element model of the nonlinear equations obtained in Chapter 2 was built. The equations define the mathematical model at discrete points of a retaining structure and its surrounding elements. It is the system of nonlinear algebraic equations.

The algorithm for solving the system of nonlinear algebraic equations was developed, in which the iterative process was implemented according to the Newton-Kantorovich method, where the necessary procedure for returning the stress vector to the area bounded by the loading function was developed. The following theories were used as loading functions: the theories of Mohr-Coulomb, Botkin, Mises, Tresca – Saint-Venant, Geniev and Pisarenko-Lebedev.

The constructed solution algorithm is implemented by professors V.A. Grishin. and A.V. Grishin in the form of a software package PLASTICA, written in C#. The author of the thesis has written and debugged a number of programme subroutines (Pisarenko-

Lebedev condition: improved user interface with regard to the input of the initial data and the output of the calculation results), which are included in this complex.

The particular potential of the proposed algorithm is implemented in the PLAXIS software package.

Chapter four provides examples of the numerical implementation of the problems using mathematical modelling in the PLASTICA software package, illustrating theoretical studies outlined in the previous chapters and the PLAXIS PC.

In the first example, the calculation of reinforced concrete fixings of the slopes of the foundation pit for a three-story underground garage is considered. To the left of the pit there is a five-storey frame building, and to the right there is a reinforced concrete slab, on which a distributed load is applied. The foundation of the building is also made in the form of a slab. A distributed loading acts on the lower floor of a three-story underground garage. The calculation was divided into six stages in accordance with the technology of construction work. The calculation results are presented in the form of the isofields of the full displacements, the total and tangential stresses of the system.

The analysis of the calculation results showed that the action of the previously constructed structures and the weight of the soil causes the soil to rise inside the pit and decrease with the depth of its width. The left extreme point of the foundation slab of the building that was previously built to the left of the foundation pit dropped by additional 4 cm after the end of construction, and the right point only by 1 cm, so the building, together with its foundation slab, declines to the left. Plastic deformations occur in the second layer of soil near the side walls of the foundation pit.

The improved PLASTICA software package was used as an alternative calculation of the limit state method for determining the stress-strain state of the structure and adjacent structures in the design of underground parking located in Kropyvnytskyi. The territory of the Kirovograd region belongs to the Eastern European platform, the crystal foundation of which is formed by Proterozoic metamorphosed rocks: granites, geysers, shales. Since the software package has been improved by expanding the library of the Pisarenko-Lebedev load function for rock soils, this makes possible to apply it during the object calculation and get objective

results.

The clarification and correction of structural elements concrete mounting wall of the pit were made using the results of calculation of stress-deformed state of the model, so they have savings in the wall thickness, valve, flow of workers and equipment, from pre-design estimates.

The total cost of the preliminary calculation was UAH 8 257 156, 00. after adjusting –UAH 7 831 911, 00, the savings amounted to UAH 425 245,00.

In the second example, the calculation of the anti-landslide structure is considered. To solve this problem, the PLAXIS software package was applied. The dimensions of the slope, the properties of its soils, the actual loadings and the characteristics of the anti-landslide structure are given in tables and graphs.

As in the previous example, the calculation was divided into successive stages in accordance with the technology of the construction work. The calculation results are presented in the form of the schemes of full displacements and isofields of total and normal stresses.

In conclusion, it should be noted that in the adopted calculation sequence there was no loss of stability of the slope at each of the five stages of the solution.

In **chapter five** the obtained results were compared with the calculations in the PLAXIS software package to assess their fidelity. The classical Coulomb method and experimental tests of three different authors were used.

According to the results of the comparison, in the first example with the experimental data obtained by Z.V. Tsagareli, it is noted that the stress diagram that is most closely related to the experimental data is the diagram obtained by calculation in the PLASTICA software (the maximum deviation in the middle part of the wall is 4.5%). Then the data obtained in the software complex PLAXIS (maximum deviation is 6%). The highest deviations are given by Coulomb calculation – 79%.

According to the results of the comparison in the second example with the experimental data obtained by P.I. Yakovlev, it is noted that the highest deviations of the normal pressure of sand on the vertical wall are observed under the unloading plate. In this area, the data obtained using the PLASTICA and PLAXIS software systems is 2.5 times

more compared with the experiment. This is explained by the fact that with a small width of the unloading plate (14.5 cm) and loose filling, the lateral pressure of the soil in the lower part of the plate differs from zero in the calculation, and in the experimental conditions due to the shrinkage of sand it is equal to zero. It should also be noted that the calculation results in the PLAXIS software package are somewhat overestimated compared to PLASTICA and the experiment.

According to the results of the comparison in the third example with the experimental data obtained by G.E. Lazebnik, it is noted that the highest deviations in the stress diagrams of passive pressure between the experimental and calculated data in PLASTICA are observed in the lower part of the wall and equal 100%, i.e. twice more, and slightly higher, they equal 9%. A similar difference in the diagrams of active pressure in the anchor fixing area is 20%. In the diagrams of moments, this difference is 23.5% in the middle part of the wall. The calculation results in the PLAXIS software package turned out to be somewhat overestimated compared with the experimental data. The maximum differences are observed when comparing with the results obtained according to the classical Coulomb theory, especially in the diagram of the passive pressure of sand on the wall.

Keywords: mathematical modelling, retaining structure, anti-landslide structure, soil mass, elastic-plastic deformations, sequence of loading stages, complex loading, stress-strain state, system of basic non-linear equations, loading function, algorithm, software complex, isofields of full displacement and stresses.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Гришин А.В., Сипливец А.А. Расчет берегозащитного сооружения от волнового воздействия. Збірник наукових праць. Серія: Галузеве машинобудування, будівництво. Вип. 4(34). Том 2. Полтава, 2012, С. 61-66 ISSN 2409-9074 (*print*) ISSN 2518-1106 (*Online*) (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: *Crossret, INDEX COPERNICUS, Academic Resource Index, Cite Factor, EBSCO, ULRICH'S WEB*).
2. Гришин А.В., Сипливец А.А. Напряженно-деформированное состояние шпунтовой стенки котлована от динамических воздействий. Вісник ОДАБА, Одеса: изд-во ОДАБА. 2013. Вип. 49 С. 53-60 ISSN: 2415-377X (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: *INDEX COPERNICUS*).
3. Гришин А.В., Сипливец А.А. Напряженно-деформированное состояние противооползневое сооружения в виде гравитационной подпорной стенки. Будівельні конструкції. Вип. 78. Книга 1. Київ. ДП НДІБК, 2013. С. 218-225 ISSN 2313-6669 (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: *Crossret, INDEX COPERNICUS*).
4. Гришин А.В., Сипливец А.А. Совместный динамический расчет шпунтового ограждения котлована и окружающего его грунтового массива. Вісник ОДАБА. Вип. 52. 2013. С. 59-66 ISSN: 2415-377X (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: *INDEX COPERNICUS*).
5. Гришин А.В., Сипливец А.А. Упругопластический расчет грунтового массива с подкрепленным отверстием от действия динамической загрузки. Збірник наукових праць, Вип. 3(38). Том 2. Полтава 2013 С. 69-75 ISSN 2409-9074 (*print*) ISSN 2518-1106 (*Online*) (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: *Crossret, INDEX COPERNICUS, Academic Resource Index, Cite Factor, EBSCO, ULRICH'S WEB*).
6. Гришин А.В., Сипливец А.А. Совместный упругопластичный расчет креплений откосов котлованов и грунтового массива. Вісник ОДАБА № 54. Одеса. 2014. С. 78-82. ISSN: 2415-377X (Фахове видання, яке індексується у

наукометричних базах даних: ,INDEX COPERNICUS).

7. Гришин В.А., Гришин А.В., Сипливец А.А. Крепление откосов котлованов. Вісник ОНМУ. Вип. 1(40). Одеса. 2014. С. 61-71 ISSN: 2226-1893 (print)(Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: Crossret, INDEX COPERNICUS).

8. Гришин А.В., Сипливец А.А. Нелинейный расчет грунтового склона от сейсмических воздействий. Вісник ОДАБА. Вип. 58. Одеса. 2015. С. 104-109 ISSN: 2415-377X (Фахове видання).

9. Гришин А.В., Сипливец А.А. Моделирование устойчивости склонов при сейсмических воздействиях. Будівельні конструкції: Збірник наукових праць Вип. 82. К.: НДІБК. 2015. С. 195-200 ISSN 2313-6669 (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: Crossret, INDEX COPERNICUS).

10. Гришин А.В., Сипливец А.А. Математическое моделирование откосов котлованов при сейсмическом воздействии. Вісник ОДАБА. Вип. 60. Одеса. 2015. С. 61-65 ISSN: 2415-377X (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: ,INDEX COPERNICUS).

11. Grishin A., Siplivets O. Comparing of results of calculation of models building to experimental data. Academic journal' Series Industrial machine building civil engineering. PoltNTU, 2018. Isssure 2(51). P. 31-37 ISSN 2409-9074 (print) ISSN 2518-1106 (Online) (Фахове видання, яке індексується у наукометричних базах даних: Crossret, INDEX COPERNICUS, Academic Resource Index, Cite Factor, EBSCO, ULRICH WEB).

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

12. Гришин А.В., Сипливец А.А. Моделирование совместной работы грунтовой среды и креплений откосов котлованов. Моделирование и оптимизация композитов. Одесса. Астропринт. 2014. С. 256-258 ISBN 978-966-190-848-1.

13. Гришин А.В., Сипливец А.А. Сравнение результатов расчета модели подпорного сооружения с экспериментальными данными. Моделювання та оптимізація будівельних композитів. Матеріали міжнародного науково-технічного семінару. ОГАСА. 2016. С. 22 ISBN 978-617-7195-29-9.

**Наукові праці за кордоном та у виданнях, включених до міжнародних
науково-метричних баз даних**

14. Гришин А.В., Сипливец А.А. Совместный расчет на прочность бетонной обделки туннеля и окружающего её грунтового массива. Сборник статей по материалам 7-й международной научной конференции, Т.1. Воронеж 2013. С. 116-124 (*Закордонне видання*)

15. Grishin A.V., Siplivets A.A. Nonlinear analysis of landslide processes under seismic effects. TECHNICAL JOURNAL 9. 1 (March, 2015) Scientific professional journal of University North. Pages 18-22. ISSN 1846-6168 (*Закордонне видання, яке індексується у наукометричних базах даних: ,INDEX COPERNICUS)*

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ВСТУП.....	20
1. СТАН ПРОБЛЕМИ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	27
1.1. Особливості застосування математичного моделювання для розглянутих систем.....	27
1.2. Типи підпірних споруд, що досліджуються в дисертації.....	28
1.2.1. Підпірні кріплення вертикальних стін котлованів, які зводяться в умовах обмеженої міської забудови.....	29
1.2.2. Протизсувні підпірні споруди.....	33
1.3. Фізико-механічні властивості ґрунтів, бетонів і металів при їхньому складному навантаженні.....	37
1.3.1. Ґрунти.....	38
1.3.2. Бетони.....	52
1.3.3. Метали.....	59
1.4. Розрахункові моделі і методи розрахунку кріплень котлованів і фундаментів існуючих і проектуваних споруд.....	62
1.5. Огляд розрахункових моделей механічної поведінки ґрунтів.....	68
1.6. Висновки до розділу 1.....	73
2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ.....	75
2.1. Переміщення, деформації і напруги.....	75
2.2. Рівняння стану.....	78
2.2.1. Умова початку пластичної течії.....	79
2.2.2. Закон течії.....	81
2.2.3. Закони зміцнення.....	83
2.3. Функції навантаження.....	86
2.3.1. Умова Кулона-Мора.....	86
2.3.2. Умова Боткіна.....	88
2.3.3. Умова Генієва.....	89
2.3.4. Умова Писаренка-Лебедева.....	91

2.4. Висновки до розділу 2.....	92
3. ОПИС АЛГОРИТМУ І ВИКОРИСТОВУВАНІ ПРОГРАМИНІ КОМПЛЕКСИ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТИМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ	93
3.1. Дискретизація області, займаної моделлю.....	94
3.2. Дискретизація вихідних рівнянь.....	99
3.3. Алгоритм рішення.....	104
3.4. Використовувані програмні комплекси.....	113
3.5. Висновки до розділу 3.....	114
4. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАВДАНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТИМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	115
4.1. Кріплення стін котлованів.....	115
4.1.1. Проектні рішення стінки котловану після розрахунку.....	120
4.2. Протизсувні споруди.....	122
5. ПОРІВНЯННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ З ДАНИМИ , ОТРИМАНИМИ ПРИ ЛАБОРАТОРНИХ ВИПРОБУВАННЯХ	135
5.1. Порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними, отриманими З. В. Цагарелі.....	135
5.2. Порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними, отриманими П. І. Яковлєвим.....	139
5.3. Порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними, отриманими Г. Є. Лазебником.....	142
5.4. Висновки до розділу 5.....	146
ВИСНОВКИ.....	148
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	151
Додаток А. Акт впровадження в навчальний процес ОНМУ МОіНУ.....	168
Додаток Б. Акт впровадження в виробничий процес УКБ ОДА Кіровоградської області.....	169

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Однією з основних причин аварійності при будівництві відкритим способом міських підземних комплексів і окремих споруд є деформація та обвалення укосів і підпірних стін котлованів. При цьому тяжкість наслідків аварій різко зростає в умовах щільної міської забудови. Як показує світова практика, в таких ситуаціях помилки при проектуванні котлованів ускладнюють будівельні роботи та нормальну експлуатацію близько розташованих міських об'єктів. Це може призвести до їхнього руйнування, що супроводжується масовим летальним травматизмом і значними матеріальними втратами. Тим часом існуючі методи розрахунку стійкості ґрунтового масиву і підпірних конструкцій стінок котлованів, що застосовуються в нашій країні, базуються на методі граничних станів. Вони не дозволяють отримати дані про напружено-деформований стан розглянутої системи, не враховують пружно-пластичні властивості матеріалів підпірної конструкції і ґрунтового середовища, а також їхню спільну роботу і процес складного навантаження. Тому діючі методи розрахунку стійкості укосів і підпірних конструкцій стінок котлованів, з одного боку, не можуть гарантувати повну безпеку будівельних робіт, а з іншого – не виключають завищення запасів стійкості і несучої здатності проектованих конструкцій, що призводить до невиправданих витрат на їхнє зведення і підтримку.

Таким чином, застосування математичного моделювання на основі теорії зміцнювального пластичного тіла, яке дозволяє більш повно враховувати реальні властивості матеріалів конструкцій і ґрунтів для визначення напружено-деформованого стану спільної роботи укосів і підпірних стін котлованів міських підземних споруд в умовах щільної забудови буде сприяти більш надійному їхньому проектуванню та є досить актуальним науковим завданням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація відповідає вимогам Закону України від 11.07.2001 р., № 2623-III «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки» і змін до цього закону від 09.09.2010 р., № 2519-IV «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки на період до 2020 року», Постанови Кабінету Міністрів України від 23.05.2011 р., № 547 «Про затвердження

порядку застосування будівельних норм, розробки на основі національних технологічних традицій та будівельних норм, гармонізованих з нормативними документами Європейського Союзу», а також тематиці науково-дослідних робіт кафедри основ і фундаментів Одеської державної академії будівництва та архітектури. Дисертаційна робота виконана в рамках держбюджетної науково-дослідної теми № 0109U003001 «Використання нелінійної динамічної моделі для спільного розрахунку підпірних стінок і взаємодіючої з ними ґрунтової основи» (2009-2020 рр.) Одеської державної академії будівництва та архітектури, а також держбюджетної науково-дослідної теми № 0115U000608 «Теоретичні основи оцінки природних і техногенних ризиків під час будівництва і експлуатації портових і шельфових споруд» (2017-2019 рр.) Одеського національного морського університету.

Мета роботи: розробка розширеної моделі підпірної споруди і розташованих поруч об'єктів для більш точного визначення їхнього напружено-деформованого стану з урахуванням фізичної нелінійності матеріалів при дії статичних навантажень в умовах складного навантаження.

Ідея роботи полягає в тому, що при розробці моделі враховуються такі реальні властивості матеріалів, як пружність, пластичність, зміцнення, а також процес складного навантаження у відповідності з послідовністю застосування навантажень і технологією виробництва робіт для більш точного визначення напружено-деформованого стану розглянутої системи.

Об'єкт дослідження – є процес нелінійної взаємодії підпірних споруд з ґрунтовим середовищем.

Предмет дослідження – є математичне моделювання підпірних споруд у вигляді кріплень бічних стінок котлованів або зсувних схилів з урахуванням пружно-пластичних властивостей їх матеріалів в умовах щільної міської забудови.

Для досягнення поставленої мети в дисертаційній роботі сформульовано і вирішено такі основні **задачі** дослідження:

– проаналізувати сучасні методи розрахунку розглянутих споруд та існуючі моделі матеріалів і ґрунтів;

- розробити розширену пружно-пластичну математичну модель системи, що складається з підпірної споруди і ґрунтового середовища, що її оточує та поруч розташованих будівель;
- визначити основні рівняння, що описують стан і зміни системи в умовах складного навантаження;
- розробити алгоритм вирішення отриманих нелінійних рівнянь на ЕОМ;
- удосконалити можливості програмного комплексу PLASTICA шляхом розширення бібліотеки функцій навантаження і поліпшення графічного інтерфейсу;
- провести розрахунки і дати їхній аналіз для підпірної споруди укусу котловану і протизсувної споруди схилу;
- провести порівняння отриманих теоретичних і експериментальних даних для оцінки достовірності отриманих результатів;
- впровадити результати досліджень у практику будівництва та навчальний процес.

Методи дослідження. Методологічною основою вирішення поставлених завдань досліджень є комплексний підхід, який включає в себе аналіз експериментальних даних і теоретичних досліджень підпірних споруд. Використовуючи фундаментальні положення механіки твердого деформівного тіла, на основі теорії пластичної течії зі зміцненням, була розроблена більш досконала розрахункова модель досліджуваної системи і одержано основні рівняння, що описують її зміни в процесі складного навантаження.

Спираючись на базові чисельні методи, був розроблений алгоритм вирішення отриманих нелінійних рівнянь. Дискретизація області, займаної моделлю, і дискретизація вихідних рівнянь виконувалася методом скінчених елементів (МСЕ). Це дозволило представити розглянуту задачу в алгебраїчній формі, тобто перейти від нескінченного числа ступенів свободи моделі до їхнього скінченного числа.

Побудова ітераційного процесу для визначення шуканих функцій, що характеризують напружено-деформований стан моделі з наперед заданою точністю, дає можливість зробити лінеаризацію вихідних нелінійних рівнянь. При цьому, операцію з коригування їхніх коефіцієнтів можна виконувати на кожній ітерації

рішення (метод змінних параметрів пружності, метод дотичних жорсткостей) або тільки на першій ітерації, або через їхню задану кількість (модифікації методу Ньютона-Канторовича, до яких належать, наприклад, метод пружних рішень і метод початкових напружень).

Використовуючи поширену і надійну систему програмування C#, був вдосконалений програмний комплекс PLASTICA, що дозволило отримувати результати рішення у вигляді таблиць, схем, ізополів і епюр. На підставі результатів розрахунку здійснено аналіз напружено-деформованого стану досліджуваної системи.

Правильність отриманих результатів підтверджена їхньою задовільною відповідністю експериментальним даним і вирішенням за допомогою інших методів.

Наукова новизна отриманих результатів:

Вперше:

- використана нова розширена модель підпірної споруди, яка дозволяє найбільш точно визначати її напружено-деформований стан і давати оцінку деформування та можливості руйнування поруч розташованих і проєктованих споруд;

- у розрахунках вперше враховуються пружно-пластичні деформації всіх елементів моделі підпірної споруди і поруч розташованих споруд, які часто значно перевершують пружні;

- враховується послідовність етапів навантаження системи відповідно до технології будівництва підпірних споруд для більш точного визначення їхнього напружено-деформованого стану;

- за результатами вирішень, які задовільно підтверджуються експериментальними даними, встановлено основні закономірності та особливості деформування розглянутих нелінійних систем в умовах складного їхнього навантаження з урахуванням фізико-механічних властивостей ґрунтів та матеріалів конструкцій.

Вдосконалено:

- програмний комплекс PLASTICA шляхом розробки та налагодження ряду

підпрограм (умова Писаренка-Лебедева, поліпшений інтерфейс користувача щодо введення вихідних даних і виведення результатів розрахунку), що дозволило отримувати результати рішення у вигляді таблиць, схем, ізополів і епюр.

Отримало подальший розвиток:

– метод розв’язання контактних задач розглядаємої системи і раніше побудованих або проєктованих поруч споруд та дослідження на основі цього напружено-деформованого стану сумісної роботи підпірних споруд та ґрунтової основи чи протизсувних споруд схилів.

Наукове значення роботи полягає у використанні нової розширеної математичної моделі підпірної споруди і поруч розташованих об’єктів, що перебувають під дією статичних навантажень. При цьому на підставі теорії зміцнювального пластичного тіла, яка дозволяє більш повно врахувати реальні властивості матеріалів конструкцій і ґрунтів, розроблена методика розрахунку, завдяки якій можна більш точніше визначити напружено-деформований стан досліджуваної системи об’єкта в процесі складного навантаження.

Практичне значення роботи полягає в тому, що запропонована розширена модель підпірних споруд у вигляді кріплень бічних стінок котлованів або зсувних схилів в умовах щільної міської забудови реалізована у вигляді програмного комплексу для ЕОМ. Це дозволяє врахувати відповідні теоретичні положення для практичного використання шляхом автоматизації вирішення складних нелінійних крайових задач. Він може застосовуватися при проєктуванні розглянутих у роботі споруд.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій підтверджується на підставі використання фундаментальних положень механіки твердого деформівного тіла, сучасних математичних моделей об’єкта дослідження, що дозволяють врахувати реальні властивості матеріалів конструкцій і ґрунтів, базових чисельних методів рішення, які дають можливість отримати досить високу точність обчислень, надійної системи програмування C#, задовільним збігом результатів розрахунків з експериментальними даними і даними, отриманими іншими методами, позитивними результатами впровадження у

виробництво.

Реалізація результатів. Результати дослідження успішно впроваджені при коригуванні проекту «Берегоукріплювальні роботи довжиною 280 м Кременчуцького водосховища в районі с. Велика Андрусівка Світловодського району Кіровоградської області», при будівництві та проектуванні греблі в селі Кірове Кіровської сільради Долинського району Кіровоградської області, при виконанні проектних робіт по об'єкту «Берегоукріплення правого берега р. Тересва на ділянці № 1 в с. Красна Тячівського району», Альтернативний розрахунок підземного паркінгу в м. Кропивницький, а також у навчальному процесі при підготовці студентів освітнього рівня «Магістр» спеціальностей 192 – «Будівництво та цивільна інженерія» та 194 – «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія і водні технології». Підтверджувальні документи наведені в додатку.

Особистий внесок здобувача. Усі положення та результати, що виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно або за його, безпосередньою участю. У роботах, опублікованих у співавторстві [1-15] особистий внесок здобувача полягає в наступному: в роботах [1-10,14,15] брав участь у постановці завдань, розрахунках та аналізі отриманих результатів; в роботі [12] брав участь в описі методики рішення задачі; в роботах [11,13] брав участь в описі методики експериментів, порівнянні результатів розрахунків з експериментальними даними та його аналізі.

Апробація результатів досліджень. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися, обговорювалися і були схвалені на: Всеукраїнському науково-практичному семінарі за участю іноземних фахівців «Сучасні проблеми геотехніки» (Полтава, Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, листопад 2012 р.) [1]; міжнародній науково-технічній конференції, присвяченій 100-річчю з дня народження професора В. Е. Прокоповича «Проблеми теорії і практики будівельних конструкцій» (Одеса, ОДАБА, квітень 2013 р.) [2]; Сьомої Всеукраїнської науково-технічної конференції «Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону» (Київ-Рівне, травень 2013 р.) [3]; 7-й міжнародній науковій конференції «Механіка руйнування бетону, залізобетону та інших будівельних матеріалів» (Воронеж, жовтень 2013 р.) [14]; міжнародній конференції

«Структурування, міцність і механіка руйнування композиційних будівельних матеріалів і конструкцій» (Одеса, ОДАБА, березень 2014 р.) [12]; міжнародному семінарі «Моделювання та оптимізації композитів» (Одеса, ОДАБА, квітень 2014 р.) [4]; міжнародній науково-технічній конференції «Гідротехнічне і транспортне будівництво» (Одеса, ОДАБА, червень 2014 р.) [6]; міжнародному науково-технічному семінарі «Моделювання та оптимізація будівельних композитів» (Одеса, ОДАБА, жовтень 2016 р.) [13]; десятій всеукраїнській науково-технічній конференції з іноземною участю «Механіка ґрунтів, геотехніка та фундаментобудування» (Полтава, Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, жовтень 2018 р.) [11], а також на інших науково-технічних конференціях і семінарах.

Публікації. Відповідно до теми дисертації опубліковано 15 наукових праць [1-11], з яких 11 – у спеціалізованих фахових виданнях України, що індексуються в наукометричних базах [1-11], у тому числі 6 – у збірниках наукових конференцій [2,3,14,12,6,11]; 2 – у зарубіжних виданнях (з них: 1 – у збірнику, що входить в міжнародну наукометричну базу[15], 1 – у збірнику наукових конференцій [14]), 2 – в інших виданнях[12-13].

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, додатків. Основну частину роботи ілюстровано 88 рисунками. Бібліографічний список складається з 199 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 169 с., з них: титульний аркуш - 1 с.; анотація, ключові слова і список публікацій автора – 16 с., із них обсяг анотації державною мовою становить - 0,27 авт.арк., англійською – 0,27 авт.арк.; основна частина (вступ, розділи дисертації, висновки) має обсяг -6,24 авт., арк., тобто займає 132 с., включаючи рисунки, що займають площу сторінки – 30 с., список використаних джерел - 17 с., додатки - 2 с.

Автор висловлює особливу подяку науковому керівнику, професору, доктору технічних наук Гришину Андрію Володимировичу за допомогу, надану на всіх етапах виконання роботи.

РОЗДІЛ 1

СТАН ПРОБЛЕМИ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Особливості застосування математичного моделювання для розглянутих систем

Наразі математичне моделювання використовується як у наукових, так і в практичних дослідженнях. Стосовно вирішення технічних завдань в найбільш сучасній постановці воно розглядається, наприклад, у роботах П.В. Трусова, О.А. Самарського, О.П. Михайлова, А.Д. Мишкіса, В.С. Зарубіна та ін. [14, 62, 102, 130]. Фактично при розрахунку будь-яких споруд використовуються математичні моделі, отже, чим точніше вони наближаються до реальних об'єктів, тим надійнішим буде проектування та подальша експлуатація. У більшості робіт з позицій математичного моделювання досліджуються в основному лише певні задачі, наприклад, процеси, пов'язані з побудовою моделей окремих елементів об'єктів переважно без вирішення питань чисельної реалізації рівнянь, що представляють чітко визначені елементи. Деякі з таких моделей для ґрунтових середовищ наведені, наприклад, у роботі [198]. Тут, з найбільш загальних позицій розглянуто підпірні споруди, що представляють собою єдину систему, до якої належать наступні елементи: конструкція підпірної стінки, ґрунтове середовище, що оточує її, підземні води і розташовані поблизу стінки інші споруди. Допускається робота сукупності матеріалів конструкцій і ґрунтів, з яких складається підпірна споруди в пружно-пластичній стадії. В цьому випадку напружено-деформований стан системи буде залежати від послідовності етапів навантажень, тобто від типу навантаження. Якщо вона збігається з послідовністю будівництва підпірної споруди, то отриманий в ньому розрахунковий напружено-деформований стан буде найбільш точно відповідати дійсному. В цей час часто при розрахунку підпірних споруд розглядають тільки окремо стінку, а інші елементи системи замінюють діючими від них навантаженнями. Експерименти П.І. Яковлева, І.Я. Лучковського [91, 172] показують, що ці навантаження залежать від видів переміщень стінки, які можуть бути визначені тільки з розрахунку, в цілому, всіх елементів системи і не можуть бути включені у вихідні дані розрахункової схеми. Переміщення стінки можуть

також викликати деформації поруч розташованих споруд, що в свою чергу може привести їх в аварійний стан.

Математичне моделювання таких складних систем має розглядатися з більш загальних позицій, які викладені в роботі О.А. Самарського і О.П. Михайлова [130]. У ній показано, що постановка питання про математичне моделювання будь-якого об'єкта породжує чіткий план дій. Його можна умовно розбити на три етапи: модель – алгоритм – програма.

Реальні підпірні споруди, зветься далі об'єктами, є складними нелінійними системами. Тому бажано, щоб із нескінченного числа факторів, що їх характеризують, було враховане в розрахунковій системі, яку називаємо моделлю, тільки кінцеве їхнє число, що відображає найважливіші властивості об'єкта. При цьому вибрані властивості повинні бути реально визначеними з дослідних даних і допускати в подальшому чисельну реалізацію моделі із застосуванням ЕОМ. Отже, обрана модель, не буде точно збігатися з реальною підпірною спорудою, але вона повинна відображати її основні властивості.

Модель досліджуваного матеріального об'єкта реалізується у вигляді математичних формул, що визначаються на підставі результатів класичної механіки суцільних деформованих середовищ, які в свою чергу базуються на фундаментальних законах природи. Після цих перетворень отримана система нелінійних рівнянь буде представляти тільки модель розглянутого об'єкта, тобто перший етап математичного моделювання. Надалі вона реалізується за допомогою чисельних методів та обраної системи програмування у вигляді алгоритму і програми, які представляють другий і третій етапи математичного моделювання і використовуються із застосуванням ЕОМ для визначення кількісних результатів.

1.2. Типи підпірних споруд, що досліджуються в дисертації

Різні типи підпірних споруд, що застосовуються в різних галузях будівництва, розглянуті, наприклад, у роботах Р.К. Клейна, Л.М. Ємельянова, А.Я. Будіна, В.О. Волосухіна, А.Н. Тетіора, Н.К. Снітко, З.В. Цагарелі [12, 16, 56, 78, 79, 133, 145, 156]. З усього цього різноманіття в дисертаційній роботі досліджується лише

два їх види: 1) підпірні кріплення вертикальних стін котлованів, що зводяться в умовах щільної міської забудови і 2) протизсувні підпірні споруди, що зводяться на схилах.

1.2.1. Підпірні кріплення вертикальних стін котлованів, які зводяться в умовах щільної міської забудови

В сучасних умовах у містах часто ведеться нове будівництво за рахунок ущільнення забудови. Поряд з існуючими спорудами, знесення яких небажане, будуються нові будівлі підвищеної поверховості або зводяться складні підземні комплекси різного призначення, як наприклад, комплекс, показаний на рис. 1.1. На рис. 1.2 зображено будівництво підземного паркінгу на Грецькій площі в місті Одесі. Такі споруди часто зводяться у відкритих котлованах значної глибини з похилими і вертикальними укосами.

Численні спостереження показують, що спорудження котлованів поблизу існуючих будівель без вживання необхідних ефективних заходів щодо неприпустимості деформацій їхніх укосів може призвести до різних аварійних ситуацій аж до руйнування, як самих котлованів, так і розташованих поруч із ними будівель. На рис. 1.3 і 1.4 наведено приклади таких руйнувань. Велика кількість аварій котлованів, що сталися, з їхнім аналізом і класифікацією наведені, наприклад, у роботах В.Я. Єрьоміна, С.М. Сотникова, І.В. Колибіна [57, 83, 138].



Рисунок 1.1. Підземне будівництво в місті Москва



Рисунок 1.2. Будівництво підземного паркінгу в місті Одеса



Рисунок 1.3. Обвалення стінок котловану на Грецькій площі в Одесі



Рисунок 1.4. Обвалення стінки котловану в Загребі (2007 р.)

На вибір типу огорожі і кріплення котловану впливають такі показники:

- глибина котловану;
- інженерно-геологічні та гідрогеологічні умови будівельного майданчика;

- конструктивна схема заглибленої частини споруди (включено або не включено огорожу в конструкцію підземної частини будівлі);
- відстані до будівель і споруд навколишньої забудови (включаючи комунікації), їхній технічний стан;
- наявність динамічних впливів біля країв виїмки (від машин і механізмів);
- економічні міркування;
- можливості будівельної організації.

У роботі буде розглянуто тільки найбільш складні котловани, які мають вертикальні укosi, що укріплюються від руйнування. На цей час для кріплення стін котлованів в основному приймаються наступні конструкції [118, 135]: «стіна в ґрунті», шпунтові огорожі і стінки з суцільного або розрідженого із забором ряду паль. Для забезпечення стійкості стін використовуються різні утримувальні конструкції.

Як показав аналіз зведених до теперішнього часу котлованів [65], 18% з них мають глибину менше 5 м, 52% – 5-10 м, 23% – 10-15 м і глибина інших більш 15 м. Використовувалися огорожі: «стіна в ґрунті» – 37%, огорожа з труб – 47%, буронабивні палі – 10% і решта – 6%. Застосовувалися кріплення: розпірки – 38%, підкоси – 28%, ґрунтові анкери – 16% та інші – 18%.

Наразі найпоширенішими стають найбільш універсальні огорожі у вигляді залізобетонних стін типу «стіна в ґрунті» при необхідності з ґрунтовими анкерами, розташованими в один або декілька ярусів. Сучасне обладнання дозволяє створювати стінки цього типу глибиною до 70 м і шириною від 0,4 м до 1,2 м. Схема анкерного кріплення наведена на рис. 1.5 і 1.6.



Рисунок 1.5. Анкерне кріплення стінок котловану



Рисунок 1.6. Установка анкерів другого ярусу

Іншим видом кріплень вертикальних стінок котлованів є розпірні конструкції. Приклад розпірної системи показаний на рис. 1.7 і 1.8.

Однак застосування анкерного кріплення огорожувальних конструкцій котлованів замість розпірних систем у багатьох випадках дає ряд техніко-економічних переваг, найважливішими з яких є:

- немає обмежень по ширині котловану;
- розширюється фронт розробки ґрунту в котловані будівельною технікою;
- відсутні будь-які перешкоди при монтажі конструкцій споруди;
- відпадає необхідність у перекладці розпірних елементів;
- застосовуються там, де можливе одностороннє кріплення огорожі котловану;
- досягається істотний техніко-економічний ефект у наступних технологічних операціях зі зведення підземної споруди (земляні роботи, монтаж будівельних конструкцій), що забезпечує істотне скорочення термінів будівництва.



Рисунок 1.7. Розпирні кріплення



Рисунок 1.8. Розпирні кріплення з упором на днище котловану

1.2.2. Протизсувні підпірні споруди

Зазвичай схилами називають нахилені в один бік ділянки земної поверхні природного походження, їх різні класифікації наведено, наприклад, у роботах М.М. Маслова і О.П. Ємельянової [55, 94].

Вивченням зсувних процесів на схилах займаються вчені різних спеціальностей. До них належать геологи, географи, будівельники, гідротехніки, дорожники, гірники, математики, механіки та дослідники інших спеціальностей. Вони вивчають якісні та кількісні оцінки руху схилів і укосів. Все це привело до того, що на цей момент із зазначених питань виконано численні дослідження і щодо них видано величезну кількість літератури. Складний шлях розвитку розрахункових методів і протизсувних заходів, викладений, наприклад, у роботах М.М. Маслова, Я.Х. Хуана, О.П. Ємельянової, А.І. Білеуша [4, 55, 93, 94, 112, 155], показав неефективність і неспроможність багатьох підходів до вирішення проблем, пов'язаних зі зсувами. а також на недостатньо вивчених закономірностях руху в

зсувних процесах.

При проектуванні надійних захисних споруд для забезпечення довготривалої стійкості схилів необхідно виходити з найбільш несприятливих умов, що виникають у районі їхнього розташування. Це, наприклад, зміни властивостей ґрунтів від вивітрювання, від порушення фільтраційного режиму підземних вод, від сейсмічних сил землетрусу, а також від підмиву річковими або морськими хвилями підніжжя схилів, їхнього підрізування, додаткового навантаження і забудови.

Схили і зсуви на Одеському узбережжі показано відповідно на рис. 1.9 і 1.10. Етапи руйнування підпірних стін морем зображені на рис. 1.11 і 1.12.

Професор Д. Петлі з університету Дарема склав базу даних зсувів, які вже відбулися (не враховувалися зсуви від землетрусів) і карту смертності (рис. 1.13) за період з 2004 до 2010 року. За вказаний час відбулося 2620 зсувів, вони показані на карті смертності білими кружечками, від них загинуло 32322 людини [194].



Рисунок 1.9. Стан схилу, близький до утворення нового зсуву

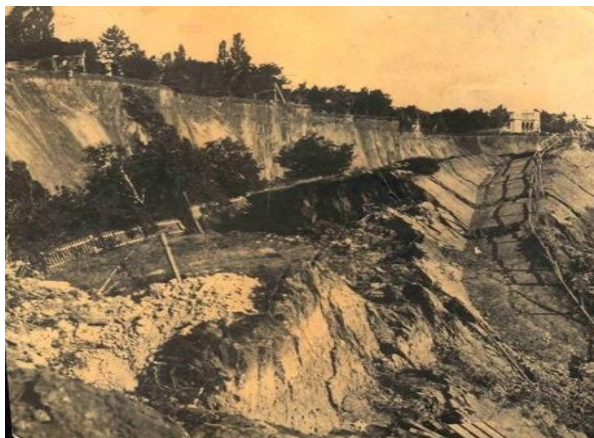


Рисунок 1.10. Зсув на Одеському узбережжі

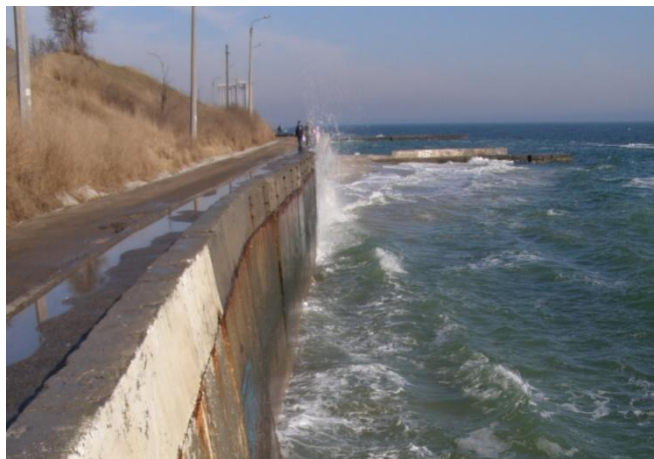


Рисунок 1.11. Початок руйнування підпірної стінки морем



Рисунок 1.12. Друга стадія руйнування підпірної стінки

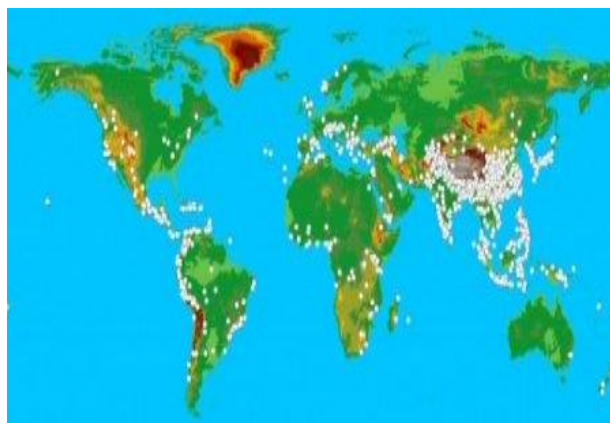


Рисунок 1.13. Карта смертності в результаті зсувів

Навіть неповні дані, наведені на рис. 1.13, показують, які величезні території Землі схильні до зсувних процесів. У цей і майбутній час прогнозується збільшення кількості освоєваних людством земель, на яких можуть виникати зрушення ґрунтових масивів. Небезпеку для споруджуваних й існуючих наземних і підземних споруд представляють не тільки схили, на яких можуть відбуватися руйнівні зсуви,

наприклад, як показано на рис. 1.10, та на території Землі, схильні до повільних нерівномірних зсувів.

Використовувані наразі моделі розрахунку схилів в основному можна об'єднати в чотири групи.

У першій з них ґрунти розглядаються як суцільне лінійно пружне середовище, що не відповідає їхньому природному стану.

Друга група розглядає ґрунти у вигляді суцільного нестисливого однофазного середовища, кожна точка якого знаходиться в гранично напруженому стані (теорія В.В. Соколовського). Ця модель не дозволяє визначати деформації в будь-якій її точці, для цього зазвичай додатково використовують попередню модель пружного середовища. У ній майже неможливо врахувати фільтраційні сили підземних вод, неоднорідність і анізотропність ґрунту та інші його реальні властивості. Вона не визначає дійсних напруг і деформацій, що виникають в кожній точці. Виконані ж по ній розрахунки реальних схилів дають занижені коефіцієнти їхньої стійкості. Ця теорія також далека від дійсності, навряд чи весь ґрунтовий масив одночасно у всьому своєму обсязі може перебувати тільки в стані граничної рівноваги.

До третьої групи, широко використовуваної в розрахунках, відносяться бездеформаційні моделі отверділого відсіку обвалення ґрунту, який приймається, як абсолютно жорстке тіло. Ці моделі також не дозволяють визначати деформації та напруження в околі будь-якої частинки ґрунту, але на відміну від попередньої моделі їхній граничний стан не виникає одночасно в кожній точці ґрунтового масиву, а тільки в точках, що лежать на поверхні зсуву, яка зазвичай приймається циліндричною чи складається з пов'язаних площин. Напружено-деформований стан в інших точках ґрунтового масиву, як вже зазначалося, залишається невизначеним, а показником ступеня стійкості схилу служить коефіцієнт стійкості. Він може приймати тільки одне конкретне значення, рівне одиниці, яке і характеризує деформацію схилу як початок руху зсуву. Для однофазних ґрунтів зазначений підхід дає в деяких випадках результати, які задовільно збігаються із спостережуваними даними утворення зсувів. Для обводнених і неоднорідних ґрунтів такий розрахунок не призводить до достовірних результатів. Аналіз і порівняння методів розрахунку

перших трьох груп, їх переваги і недоліки викладені в роботах М.М. Маслова, О.П. Ємельянової, Р.Р. Чугаєва [55, 94, 163].

Четверта група моделей розглядає ґрунти схилів як суцільне, деформоване, пружно-пластичне, неоднорідне і зміцнювальне середовище, в кожній точці якого можна з єдиних позицій визначати, як напруги, так і деформації. Ця найбільш прогресивна нелінійна теорія складна, як у теоретичному викладі, так і при чисельній реалізації, але вона, в порівнянні з іншими переліченими вище теоріями, найбільш повно відображає природні властивості ґрунтів [41, 42, 61]. Тому вона більш детально розглянута в розділі 2.

1.3. Фізико-механічні властивості ґрунтів, бетонів

і металів при їх складному навантаженні

При розрахунку котлованів із кріпленнями або протизсувних підпірних споруд повинно враховуватися, що ґрунтове середовище і матеріал конструкцій кріплення можуть перебувати в пружно-пластичному стані. Це відповідає їх реальній роботі під час будівництва та експлуатації. Тому необхідно знати які фізико-механічними властивості їм притаманні. Ці властивості зазвичай визначаються на основі експериментального вивчення макроскопічної поведінки цих деформованих середовищ, тобто феноменологічно. Слід, однак, відзначити, що визначені за результатами лабораторних випробувань властивості ґрунтів і будівельних матеріалів, не завжди відображають їхній стан у спорудах, що реально експлуатуються, тому необхідно теж звертати на це увагу.

При подальшому викладі будуть використовуватися наступні позначення інваріантів тензора напруг і тензора деформації, які зазвичай використовуються в експериментах:

$$\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

$$\psi = \arctg \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)}, \quad -\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}.$$

Ці інваріанти називаються: $\frac{1}{3}\sigma_0$ – середня нормальна напруга; $\bar{\sigma}$ – інтенсивність дотичних напруг; ψ – кут виду напруженого стану, він пов'язаний з параметром Лодє наступним співвідношенням:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \sqrt{3} \tg \psi.$$

Тут σ_i ($i = 1, 2, 3$) – головні значення тензора напруг.

Інваріанти тензора деформації:

$$\gamma_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3,$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\gamma_2 - \gamma_3)^2 + (\gamma_3 - \gamma_1)^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\gamma}{\bar{\gamma}^3}\right) = \arctg\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_1 - \gamma_3}\right],$$

$$\text{де} \quad -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

Тут γ_i ($i = 1, 2, 3$) – головні значення тензора деформації, які при малих деформаціях зазвичай позначаються як ε_i .

1.3.1. Ґрунти

Першою особливістю ґрунтів є залежність їхньої деформації формозміни від гідростатичного тиску, тобто від першого інваріанта тензора напружень. Причому така залежність є нелінійною і з залишковими деформаціями. Це підтверджується численними дослідними даними, наприклад, наведеними в роботі [11].

Друга особливість ґрунтів полягає в тому, що об'ємна деформація нелінійно

залежить не тільки від першого інваріанта тензора напружень, але також істотно від другого інваріанта девіатора напружень і слабше від кута виду напруженого стану (або параметра Лодє μ_σ). При аналізі експериментів часто об'ємну деформацію представляють у вигляді суми від всебічного (гідростатичного) обтиску тиском σ_{cp} і від деформації формозміни, яка, в свою чергу, складним чином залежить від трьох інваріантів тензора напруг. Зміна об'єму при зсуві називається дилатансією.

Зміна об'єму від гідростатичного тиску σ_{cp} є нелінійною функцією переважно із залишковими деформаціями, які після розвантаження не відновлюються. Проте величина як пружних, так і пластичних деформацій навіть для пухкого піску невелика [149]. Зміна об'єму ґрунту від зсуву також є нелінійною функцією. Її частка в загальній деформації залежить від співвідношення першого і другого інваріантів тензора напруг, але ця величина зазвичай менше в кілька разів, ніж одержувана від всебічного тиску σ_{cp} . Але для деяких ґрунтів із порушеною структурою вони за величиною близькі один до одного. За пропозицією О.А. Григоряна, зв'язок між зсувними напругами і деформаціями вважається лінійним, а між всебічним тиском і щільністю ґрунту – нелінійним. Зазначені співвідношення також залежать від фізичних параметрів ґрунту (вологості, пористості, гранулометричного і мінералогічного складу). Аналіз впливу цих факторів наведено в роботі [11]. Так для дрібного піску об'ємні деформації при гідростатичному тиску і при девіаторному навантаженні практично не відрізняються і майже не залежать від вологості. Для пісків середньої і великої крупності ці деформації, в значній мірі, залежать від їхньої вологості.

На рис. 1.14 показано графіки зміни обсягу при зсувних деформаціях і постійних значеннях σ_{cp} для а) пухких пісків, б) для щільних пісків, в яких особливо яскраво проявляється явище дилатансії [11]. Її знак і величина залежать від щільності ґрунту, від траєкторії та інтенсивності навантаження. На швидкість дилатансії пісків також істотно впливає траєкторія навантаження, їхня щільність і гранулометричний склад.

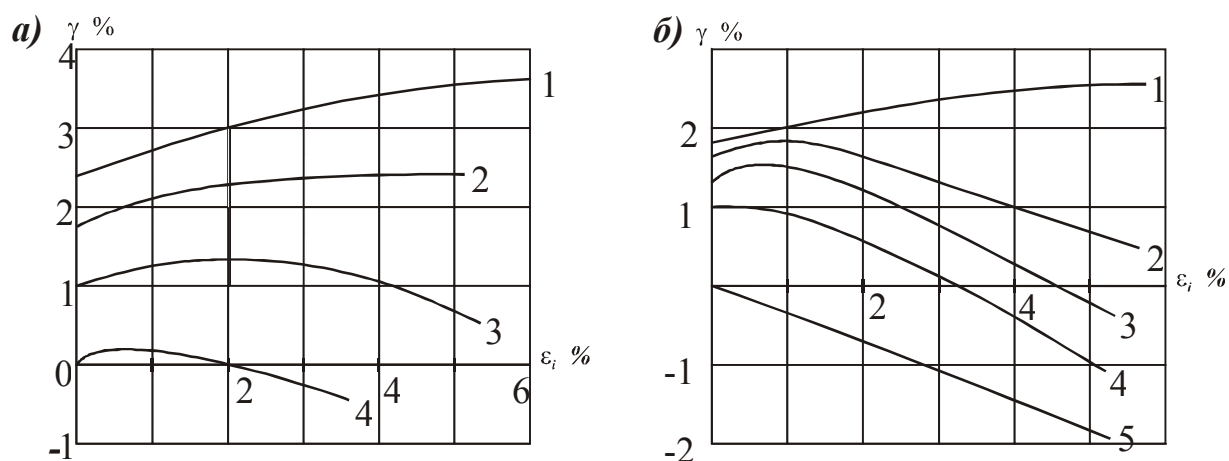


Рисунок 1.14. Залежність γ і $\varepsilon_i \left(\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\gamma} \right)$ для:

а) пухкого піску при значеннях σ_{cp} в МПа: 1) 0,5; 2) 0,2; 3) 0,1; 4) 0,0;

б) для щільного піску при значеннях σ_{cp} в МПа:

1) 0,5; 2) 0,3; 3) 0,1; 4) 0,1; 5) 0,0

Явище дилатансії для ґрунтових середовищ підтверджується великою кількістю експериментальних даних і є найбільш істотним фактором при деформуванні. Їхня систематизація і аналіз наведено, наприклад, у [11, 149]. Дилатансія не спостерігається при повторюваних навантаженнях в діапазоні нескінченно малих і середніх деформацій. Її ефект починає позначатися при величинах деформацій зсуву вище 0.0001 ... 0.001. Для конструкційних матеріалів дилатансією зазвичай нехтують, оскільки вона має другий порядок малості. Отримані експериментальні закономірності можна схематизувати у вигляді графіка, показаного на рис. 1.15.

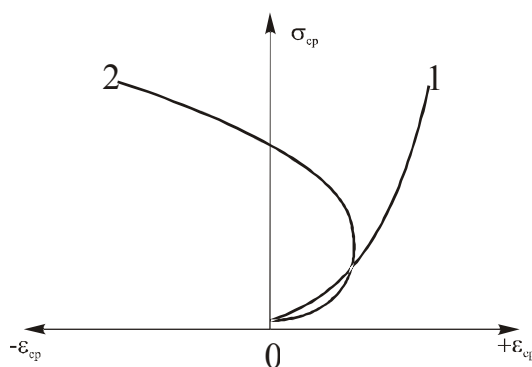


Рисунок 1.15. Об'ємне деформування ґрунту:

1) від всебічного тиску; 2) сумарна об'ємна деформація

Основною причиною прояву зазначених вище властивостей є, як зазначено в роботі [11], наслідки відмінності в опорі ґрунтів при розтягуванні і стисненні.

Наведені вище результати експериментів над ґрунтами дозволяють зробити наступні висновки. Ґрунт є середовищем, що нелінійно стискається, повна його деформація складається з пружної, пластичної і в'язкої складових. При повному розвантаженні пластичні і в'язкі деформації визначаються як залишкові. Пружна ж деформація в порівнянні з пластичною і в'язкою є малою величиною. Тому уявлення про модуль деформації як про величину сталу, що залежить тільки від виду ґрунту і його фізичних властивостей у вихідному стані, не відповідає дійсності і розглядається лише як перше дуже грубе наближення.

Процес навантаження можна відобразити в просторі напруг σ_{ks} або деформацій γ_{ks} . Деякою лінією, яку зазвичай називають траєкторією навантаження або деформації. Якщо лінія є прямою, то навантаження називаються простими, якщо вона крива або складається з відрізків прямих або кривих ліній, то – складними. Такий процес також можна зобразити в просторі інваріантів σ_i , $i = 1, 2, 3$ або σ_0 , σ , ψ . Напружено-деформований стан називається подібним, якщо компоненти девіаторів напруг і деформацій пропорційні, і співвісні, коли головні майданчики цих девіаторів збігаються у напрямку. Експериментальними даними встановлено, що при простому навантаженні досить точно дотримуються подібність і співвісність тензорів напруг і деформацій. Складне навантаження, яке

заздалегідь в умовах експлуатації ґрунтів передбачити неможливо, супроводжується зміною кута виду напруженого стану ψ і (або) поворотом осей головних напруг $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ у різному стані.

Досліди Г.М. Ломізе і О.Л. Крижановського [86] показали, що при простому навантаженні виконується рівність $\mu_\sigma = \mu_\gamma$, якщо $\mu_\sigma = \text{const}$. При складному навантаженні, коли μ_σ змінюється, ця рівність порушується. Результати таких дослідів наведено на рис. 1.16.

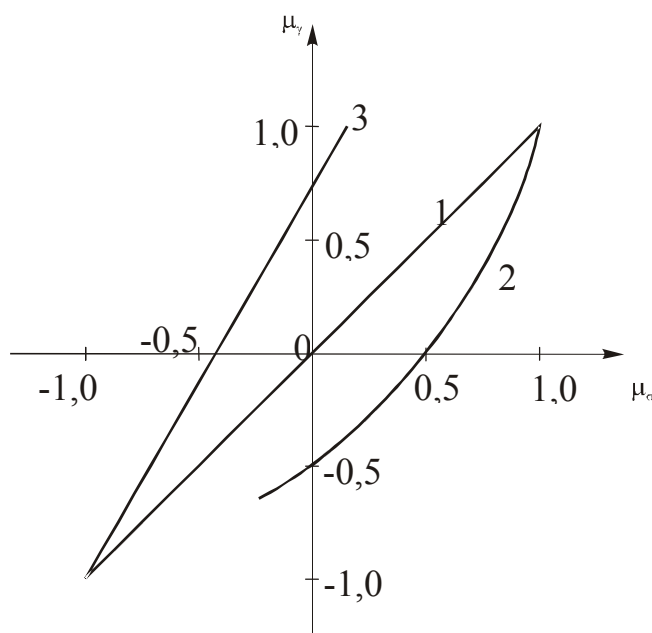


Рисунок 1.16. Подібність напружено-деформованого стану:

- 1) $\mu_\sigma = \text{const}$, подібність виконується;
- 2) $\sigma_{cp} = \text{const}$, $\bar{\sigma} = \text{const}$, μ_σ змінюється від значення -1 до 1, подібність не виконується;
- 3) змінюються σ_{cp} , $\bar{\sigma}$, μ_σ , подібність не виконується

Цими та іншими експериментами встановлено, що співвісність і подібність напружено-деформованого стану ґрунтів виконується тільки при незмінному значенні параметра μ_σ . При складному навантаженні ця умова не має сенсу.

В експериментах, коли складне навантаження здійснювалося після всебічного обтиснення зразків ґрунту, співвісність і подібність тензорів напруг і деформацій

майже не порушувалися. Але коли складному навантаженню передувало просте навантаження, то співвісність і подібність тензорів не виконувалися [11]. Також було встановлено існування траєкторій складного навантаження при зміні виду напруженого стану і поворотів осей головних напруг при збереженні подібності й співвісності тензорів напруг і деформацій. При цьому пластичні деформації, як і міцність ґрунту, істотно залежали від виду напруженого стану.

Дослідні дані встановили, що кут внутрішнього тертя і коефіцієнт Пуассона для піщаних ґрунтів при плоскій деформації не залежать від траєкторії навантаження [59]. При цьому кут внутрішнього тертя на 12-15% вище, ніж при осесиметричному стисненні. Але в роботі [92] показано, що питоме зчеплення і кут внутрішнього тертя для пісків є функціями від параметра Лоде, тобто вони не інваріантні щодо напруженого стану, а залежать від виду випробування. Для глинистих ґрунтів цей вплив позначається в меншій мірі. Отже, визначення питомого зчеплення і кута внутрішнього тертя ґрунтів повинні проводитися при тому ж вигляді напруженого стану, при якому вони будуть використовуватися в розрахунках.

У експлуатованих спорудах ґрунтові масиви зазвичай працюють в умовах складного навантаження, від якого, як показали експериментальні дані, істотним чином залежить їх напружено-деформований стан і величина пластичних деформацій. Тому моделі ґрунтових середовищ повинні враховувати можливість навантаження по криволінійних траєкторіях, коли допускається порушення подібності і співвісності тензорів напруг і деформації. Це викликано тим, що одному і тому ж напруженому стану ґрунту можуть, в залежності від режиму навантаження, відповідати різні деформації.

При деформації ґрунтів у реальних умовах їх експлуатації спостерігаються зміни не тільки $\bar{\sigma}$, але й σ_0 , ψ . Так наприклад, для піщаних ґрунтів інваріант ψ у процесі деформування залежить від їх щільності й гранулометричного складу, а також від траєкторії навантаження. Те, як у цьому випадку відбувається поділ пружних і в'язкопластичних деформацій, по якому шляху розвивається навантаження і розвантаження і як фіксується граничний стан, – буде наступним

етапом аналізу експериментальних даних.

За дослідними [61, 98] даними, для деякої матеріальної частки ґрунту графік залежності $\bar{\sigma}-\bar{\gamma}$ при фіксованих значеннях σ_0 і ψ , наприклад має вигляд, як наведено на рис. 1.17.

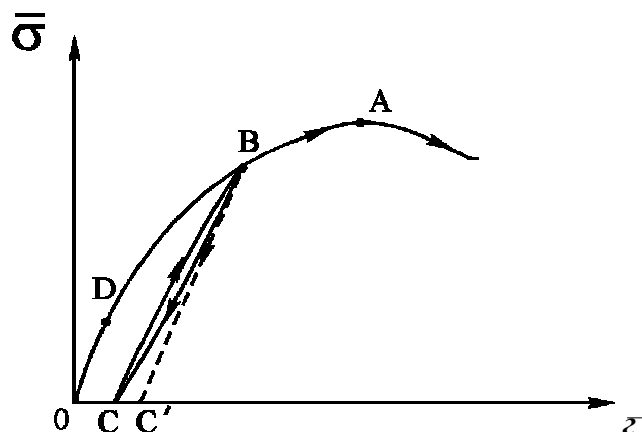


Рисунок 1.17. Деформація ґрунту

На графіку показана точка граничної рівноваги, що позначається через A. До цієї точки частка ґрунту знаходиться в domeжовому стані, а після її – в позамежному. До точки D відбувається тільки пружне деформування ґрунту. У позамежному стані при незмінних напругах або при їх зменшенні відбувається перебіг ґрунту. У позамежованому стані, навпаки, зростання деформації можливе тільки зі збільшенням напруг (процес навантаження BA) або їх зменшенні зі зниженням напруг (процес розвантаження BC). Після розвантаження в ґрунті зберігаються залишкові деформації, рівні OC. Отже, в ґрунтах і в додатковому стані спостерігаються як пружні, так і пластичні деформації, причому останні істотно переважають. Область пружних деформацій у ґрунті в процесі деформування змінюється. Так при повторному навантаженні з точки C межа пластичності, яка дорівнювала $\bar{\sigma}$, в точці D, стала дорівнювати $\bar{\sigma}$ в точці B. Отже, межа між пружною і пластичною областями змінюється і залежить від параметрів зміцнення. Слід відразу відзначити, що в багатьох роботах, наприклад у [61, 98], експериментальними даними підтверджено теоретичні твердження про незастосовність для ґрунтів деформаційних теорій пластичності при їх складному

навантаженні.

Поверхня навантаження, в просторі інваріантів σ_0 , $\bar{\sigma}$, ψ (або σ_{cp} , σ_i , μ_σ) розділяє пружне і пластичне деформування і є сукупністю меж пружності для всіляких напружених станів. Вона також має цілу низку специфічних властивостей, які будуть розглянуті нижче. Досліди, проведені щодо перевірки її існування в різних умовах напруженого стану, були виконано Б.В. Дідухом, В.О. Іоселевичем, К.Ю. Зарецьким, Р.М. Ломизе, О.Л. Крижанівським, І.Н. Іващенко, М.Н. Захаровим, М.В. Малишевим, Л.Н. Рассказовим, А.Б. Фадєєвим, Д. Друккером, А. Бішопом [53, 59, 61, 63, 64, 71, 86, 92, 149, 151, 180]. На підставі отриманих експериментальних даних можна стверджувати, що більша частина дослідів підтверджує існування в ґрунтів функції навантаження, яке в просторі інваріантів тензора напружень представляється різними поверхнями: а) гладкими; б) сукупністю гладких із сингулярними точками і лініями їх перетину; в) сукупністю гладких, які в процесі навантаження змінюють форму і відриваються одне від одного. Така різноманітність форм поверхонь, в якійсь мірі, викликана різною точністю вимірювання початку утворення пластичної деформації від формозміни і від різнобічного стиснення.

На рис. 1.18 показано сліди гладких поверхонь навантаження на площині з координатними осями $\xi_1 = \sigma_0 / \sqrt{3}$ та $r = \sqrt{3}\bar{\sigma}$, отриманих в [52] на трьохвісьовому приладі для піску. Траєкторії навантаження створювалися в два етапи. На першому етапі зразок ґрунту всебічно стискався до значення напруги, рівного p .

На другому етапі напруги σ_1 і $\sigma_2 - \sigma_3$ змінювалися за заданою програмою. На цьому рисунку траєкторії навантаження на другому етапі представлені відрізками прямих ліній.

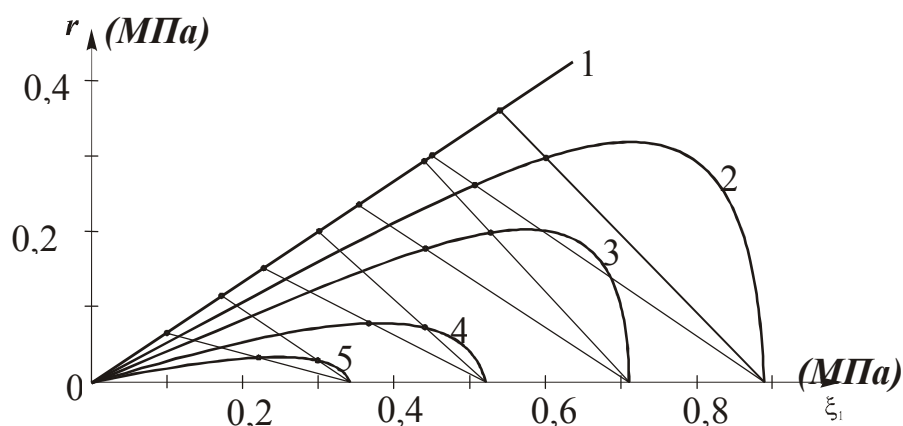


Рисунок 1.18. Сліди поверхонь навантаження при $\sigma_{cp} = 0,5$ МПа :

2) 0,5; 3) 0,4; 4) 0,3; 5) 0,2; 1) слід поверхонь навантаження

Експериментальними даними встановлено [63, 64], що в процесі розвитку пластичних деформацій поверхні навантаження змінюють форму і переміщуються в просторі напружень. Досліди проводилися для суглинку і піску при постійному значенні першого інваріанта тензора напруг $\sigma_{cp} = \frac{1}{3}\sigma_o = 0,5$ МПа. Зміна напруженого стану ґрунту фіксувалася величинами інваріантів $\bar{\sigma}$ і μ_σ та аналізувалося положення сліду поверхні навантаження на девіаторній площині простору головних напруг.

На рис. 1.19. показано положення сліду поверхні навантаження для суглинку на площині $\sigma_{cp} = 0,5$ МПа при наступних значеннях інваріантів $\bar{\gamma}$ і μ_σ : а) $\mu_\sigma = -1$; $2\bar{\gamma} = 1,25\%$, $5,6\%$, $8,5\%$; б) $\mu_\sigma = 1$; $2\bar{\gamma} = 1,6\%$, $2,8\%$.

При аналізі проведених експериментів встановлено, що з розвитком пластичних деформацій відбувається зміна форми поверхні навантаження з витягуванням її в напрямку навантаження і вона відмінна від окружності умови Мізеса. При навантаженні її в одному напрямку вона розширюється в усіх напрямках. При цьому поверхня залишається опуклою і гладкою, сингулярні точки і

лінії на ній не спостерігалися.

У точках 1-5 товстими стрілками відзначено напрямки векторів напружки, а тонкими – збільшення векторів деформації. При цьому вектор $d\epsilon^p$ у напрямку часто не збігається ні з напрямком вектора dy , ні з напрямком нормалі, але він завжди знаходиться ближче до нормалі, ніж до вектору dy або збігається з нею. Особливо таке положення вектора $d\epsilon^p$ спостерігається на осях симетрії сліду поверхні навантаження.

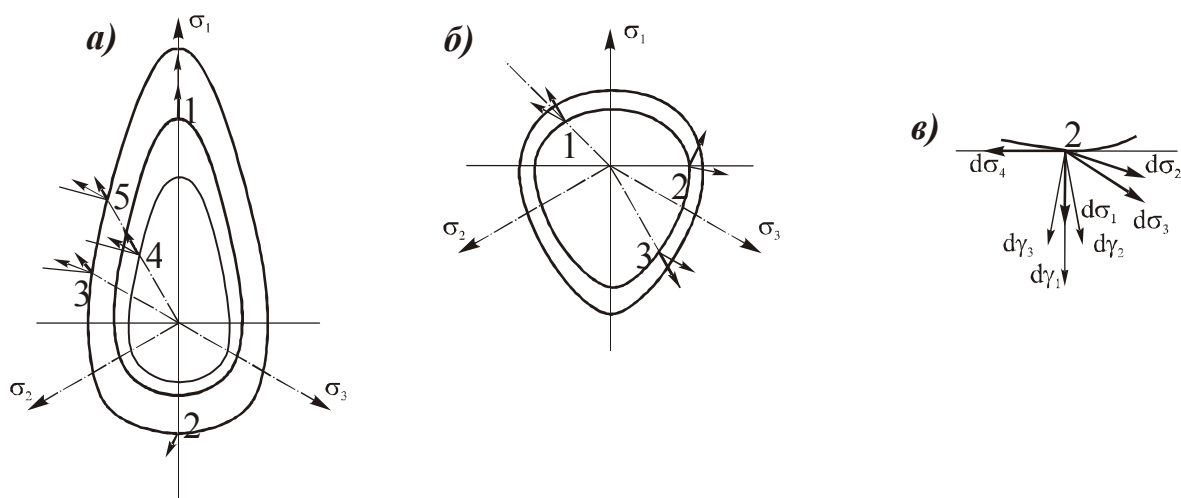


Рисунок 1.19. Розширення слідів поверхні навантаження на площині

$$\sigma_{cp} = 0,5 \text{ МПа} \quad \text{при: а) } \mu_{\sigma} = -1; \quad \text{б) } \mu_{\sigma} = 1;$$

в) довантаження в точці 2 для сліду поверхні навантаження з а)

На цьому ж рисунку в) в точці 2 представлені вектори пластичної деформації $d\epsilon_i$, отримані при довантаженнях dy_i у декількох напрямках. Цифрами 1, 2, 3, 4 показана послідовність довантажень. Зміна напрямків вектора dy змінює напрям вектору $d\epsilon$. Якщо вектор dy спрямований по дотичній до поверхні навантаження або всередину її, то прирощення пластичних деформацій не отримано, тобто $d\epsilon = 0$. У цілому можна відзначити, що вектор збільшення пластичної деформації відхиляється несуттєво від нормалі до поверхні навантаження або збігається з нею.

У цих же роботах для суглинку і піску розглянуті процеси переміщення даних

поверхонь при різних радіальних навантаженнях. Вони залишалися опуклими, гладкими і замкнутими, зі збільшенням тиску σ_{cp} розширювалися. Якісні особливості зміни форми і розмірів поверхні навантаження для піску і суглинку були однаковими. На рис. 1.20 показано переміщення сліду поверхні навантаження для піску на девиаторній площині при значенні $\sigma_{cp} = 0,5$ МПа.

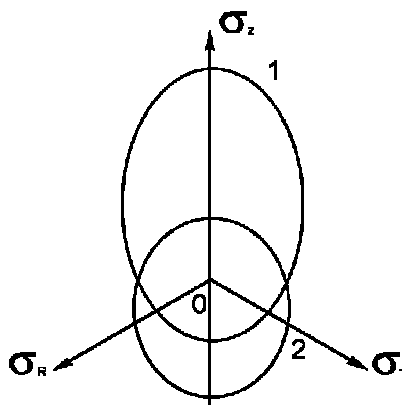


Рисунок 1.20. Переміщення поверхні навантаження

Первинне навантаження поверхні, зазначене цифрою 1, виконано при величині $\mu_{\sigma} = -1$ і до досягнення деформації $2\bar{\gamma} = 1,2\%$, але при значенні $\sigma_{cp} = 0,5$ МПа. Потім при постійному тиску σ_{cp} було виконано навантаження в протилежному напрямку до величини $2\bar{\gamma} = 1,2\%$, яка відзначена цифрою 2 на цьому рисунку. Зміна напрямку навантаження на протилежний викликає рух всієї поверхні. Вона при цьому залишається симетричною, але змінює форму, з'являється незначна витягнутість у новому напрямку навантаження.

Отримані в [63, 64] експериментальні дані дозволяють сформулювати такий висновок. Поверхня навантаження в просторі головних напруг замкнута, є гладкою і опуклою. Просте навантаження викликає загальне розширення поверхні. Слід поверхні на площині, перпендикулярній осі σ_0 , має некругову форму, і витягнутий в напрямку навантаження. Зміна напрямку навантаження призводить до її деформації і руху. Має місце прояв ефекту Баушингера. Для глинистих ґрунтів спостерігається запізнювання в часі деформацій, що пов'язано з проявом їх

в'язкопластичних властивостей. Час запізнювання залежить від властивостей ґрунту і від величини та характеру діючого навантаження. Все це дозволяє вважати прийнятним використання з задовільною точністю асоційованого закону пластичної течії із зміцненням.

Результати досліджень у роботі [71] встановлюють той факт, що асоційований закон пластичної течії зі зміцненням стосовно до ґрунтів у повному обсязі не виконується. Але він має і великі переваги, так як дозволяє з єдиних позицій описати гідростатичне і девіаторне навантаження, дилатансію, активні, пасивні і нейтральні процеси деформування при складному навантаженні в додатковому і граничному станах.

Отримані поверхні навантаження [71] можна трактувати як обвідні відносно великої кількості сингулярних точок, утворених перетином деяких інших регулярних поверхонь навантаження. Така можлива гіпотеза вперше була висловлена В.Т. Койтером [82].

Сформована таким чином модель наближається до моделей теорії ковзання, у яких навантаження відбуваються в конічних точках поверхні навантаження, а напрямки векторів збільшення пластичних деформацій залежать від напрямку векторів довантаження. Можливо, визначені в [63, 64] поверхні навантаження і є представниками таких кривих поверхонь, отриманих із великим допуском на величину збільшення пластичних деформацій.

Граничний стан ґрунту характеризується граничною поверхнею, яка може описуватися функцією такого ж виду, що і догранична поверхня навантаження, що знаходиться в крайньому положенні, але в ній параметри пластичності повинні замінюватися параметрами міцності, які повинні бути інваріантні до виду напруженого стану. Ця поверхня ділить простір напруг на дві області, в одній з яких ґрунт знаходиться в дограничному стані, а сукупність точок, що лежать на поверхні, визначає граничну за міцністю стан. Стосовно ґрунтів вид граничної функції велось обговорення в роботах [61, 92]. Експерименти показали, що такі функції можуть бути представлені лінійною залежністю щодо головних напружень. Якщо прийняти, що накопичення пластичних деформацій відбувається за законом сухого тертя, то

використовувані для ґрунтів критерії міцності відрізняються один від одного тільки положенням майданчиків ковзання та інтерпретацією параметрів міцності [61].

Якщо в теоретичних дослідженнях або розрахунках використовуються результати випробування ґрунтів, для яких види напруженого стану різні, то в цьому випадку критерій міцності повинен бути інваріантний, його параметри не повинні залежати від виду напруженого стану [61]. На підставі експериментальних даних встановлено, що ці умови виконуються, якщо: 1) параметр Лоді μ_σ знаходиться поблизу значення +1 або дорівнює йому і застосовується критерій міцності Боткіна; 2) параметр Лоді μ_σ дорівнює іншим значенням з інтервалу $[-1, +1]$ і використовуються критерії міцності Кулона-Мора. Так для незв'язаних ґрунтів в умовах плоскої деформації, коли параметри міцності визначені в стабілометричних дослідах при параметрі Лоді μ_σ , рівним +1, то їх значення можна використовувати в критеріях міцності Кулона-Мора. Застосування умови Кулона-Мора для всього діапазону зміни параметра неприпустиме, так як кут внутрішнього тертя є на підставі експериментальних даних змінною величиною. В [92] було показано, що розрахунки ґрунтових масивів можуть базуватися на умови Кулона-Мора і давати достовірні результати, якщо в цій умові приймати кут внутрішнього тертя, що відповідає тому значенню параметра Лоді, яке буде в даному масиві в натурних умовах. Для ґрунтових масивів, що працюють в умовах плоскої деформації, можлива реалізація зрушень тільки в площині $\sigma_1, \sigma_3 (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$, що зумовлює використання в розрахунках умов міцності, які не містять σ_2 , тобто умов Кулона-Мора і Тріска-Хілла. Застосування умови Боткіна, яка передбачає настання граничного стану на девіаторній площині, в цьому випадку може призвести до помилок.

В якості граничного навантаження для ґрунтів зазвичай приймається такий її рівень, при якому спостерігаються їх незатухаючі пластичні деформації при незмінному напруженому стані. За В.Т. Койтером [82], під критерієм пластичного руйнування розуміється рівень напруг, перевищення яких призводить до нестабілізованого накопичення залишкових деформацій. Вивчення процесу

невстановленого руху ґрунтового середовища викликає необхідність враховувати фактор її геометричної нелінійності, а для цього буде потрібна нова експериментальна апаратура. Іноді використовуються й інші концепції руйнування ґрунтів, наприклад, стан граничної рівноваги, межа плинності або міцності.

У [61] наведено рівняння тривалої міцності ґрунтів при постійно діючому навантаженні. При довільному режимі навантаження ґрунту в часі ці рівняння невірні, і питання про тривалу міцність у цьому випадку залишається відкритим.

У механіці багатофазних ґрунтів прийнято, що якщо коефіцієнт водонасичення менший за 0,7...0,8, то процес деформування протікає без віджимання рідини і моделюється як суцільне однофазне середовище. В іншому випадку ґрунт вважається багатофазним середовищем, і його деформування визначається з використанням однієї з моделей консолідації, які докладно розглянуті, наприклад, в роботах [25, 61, 143, 154, 158, 169]. При нестабільному стані ґрунту, в процесі взаємодії його скелета і порової рідини, відбувається перерозподіл загальних напружень, яке закінчується повною передачею зовнішнього навантаження на скелет, і в результаті настає стабілізація.

Механічні параметри міцності зв'язаних ґрунтів φ^* , c^* істотно залежать від їх вологості w . [94].

Зміна вологості робить сильний вплив на міцність й деформованість просадних ґрунтів. Вплив зміни вологості на зчеплення ґрунту та на відносну просадочність, досліджувався Г.М. Ломізе та Г.І. Кравцовим [98]. Було встановлено, що найбільша зміна зчеплення відбувається у вузькому діапазоні зміни вологості, а також що вологість ґрунту найбільш впливає на його зчеплення, а кут внутрішнього тертя залишається майже без змін.

Наведений короткий аналіз механічної поведінки ґрунтів при статичних навантаженнях дозволяє зробити наступні узагальнення. Опір ґрунтів зсуву залежить від їхніх фізичних і механічних параметрів, а також від напружено-деформованого стану, часу і характеру впливу. З огляду на велику різноманітність властивостей, ґрунтів, доцільно використовувати моделі, які враховують головні їхні особливості: переважання залишкових в'язкопластичних деформацій, які

становлять іноді до 95% від загальних деформацій і спостерігаються при статичних навантаженнях; залежність пластичних деформацій від траєкторій навантаження і виду напруженого стану; прояв дилатансії, об'ємна деформація якої для деяких ґрунтів може мати за величиною такий самий порядок, що і від всебічного стиснення; прояв ґрунту як багатофазного середовища, шлях навантаження якої при ефективних напругах відрізняється від шляху навантаження в повних напругах у залежності від ступеня його водонасичення; наявність залишкових об'ємних деформацій зумовлює замкнутість поверхні навантаження. Також необхідно брати до уваги зазначений вище взаємозв'язок властивостей, відображений у найбільш загальній інваріантній формі, і можливість запису між тензорами напружень і деформацій тільки у вигляді неголономних співвідношень.

1.3.2. Бетони

Бетон – це складне багатофазне і нелінійне середовище, властивості якого залежать від багатьох внутрішніх і зовнішніх факторів. При побудові моделей таких середовищ необхідно максимально враховувати особливості їхніх механічних властивостей. Це тріщинуватість, неоднорідність, анізотропія, усадка, в'язкість, пластичність та інші. Деякими з них вони наділені в процесі виготовлення, а інші набули при деформуванні. Для вивчення властивостей бетону було виконано за різними методиками величезну кількість експериментів, опис яких розосереджений у великій кількості монографій і статей, перелік яких просто немислимий. Досить назвати, наприклад, такі роботи, як [3, 9, 76, 100, 108, 109, 125].

Як і для ґрунтів, основною особливістю бетонів є їхня нелінійна залежність деформацій від напруженого стану. Але причина прояву нелінійності тут має іншу природу, пов'язану, в основному, з тріщиноутворенням. Із позиції другої групи граничних станів це явище детально розглянуто у роботах [3, 76, 125].

Бетон є неоднорідним середовищем. Його структуру формує великий заповнювач, розчинна частина і порожнечі, утворені після видалення води замішування. У процесі твердіння бетону між заповнювачем і цементним каменем або по цементному каменю утворюються технологічні тріщини, викликані

внутрішніми напругами. При осьовому навантаженні циліндричного зразка, виготовленого з бетону, до деякого рівня напруг, що позначається через параметр R_t° , в ньому не спостерігається утворення нових мікротріщин. При цьому відношення поперечних деформацій зразка до його поздовжніх, яке фіксується коефіцієнтом γ , не зростає, тобто відбувається зменшення його об'єму. Зі збільшенням навантаження поступово прискорюється розвиток мікротріщин, поперечні деформації починають рости швидше поздовжніх, тобто зменшення об'єму сповільнюється, а потім він починає зростати. Рівень напруг, якому відповідає мінімальний об'єм зразка, позначається через параметр R_t^ν . Його величина характеризує межу порушення суцільності бетону за рахунок утворення в ньому мікроруйнувань. В інтервалі між межами R_t° та R_t^ν у бетоні виникають пластичні деформації.

Якщо пластичні деформації в ґрунті не викликають макроскопічних порушень його суцільності, то залишкові деформації в бетоні, що виникають при напругах, вищих за межу R_t^ν , супроводжуються спочатку незворотними процесами мікроруйнування, які потім переростають у макроскопічні руйнування з порушенням суцільності в бетоні. Тому залишкові деформації, що з'явилися при напругах вище рівня R_t^ν , називають пластичними деформаціями другого роду або псевдопластичними деформаціями.

У [125] показано, що межі рівнів напруги R_t° і R_t^ν залежать від багатьох факторів: від відносин В/Ц, від складу заповнювачів, від цементно-піщаного співвідношення і від зчеплення цементного каменю з заповнювачем. На рис. 1.21 показано залежності R_t° і R_t^ν від складу бетону, взяті з роботи [125].

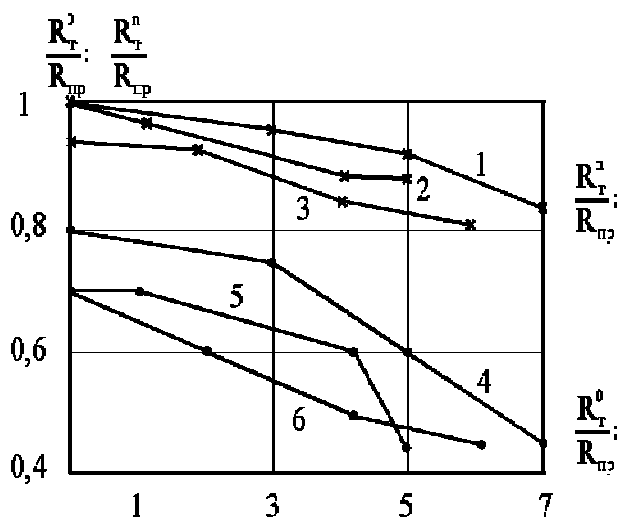


Рисунок 1.21. Значення R_T^o і R_T^v при наступному складі бетону Ц:П:Щ:В:Ц:

- 1) 1 : 4 : x : 0,8; 2) 1 : 2 : x : 0,54;
- 3) 1 : 3 : x : 0,65; 4) 1 : 4 : x : 0,8;
- 5) 1 : 2 : x : 0,54; 6) 1 : 3 : x : 0,65; x – щебінь

Експериментальні дані фіксують, що збільшення вмісту крупного заповнювача зменшує значення параметрів R_T^o і R_T^v . У [174] встановлено, що для крупнозернистих важких бетонів межі R_T^o і R_T^v підвищуються з ростом призмової міцності R_{np} .

Неоднорідна структура бетону, з одного боку, сприяє утворенню тріщин і знижує його здатність чинити опір зовнішнім впливам. Але, з іншого боку, як показано в [76, 109], є фактором, що перешкоджає їх розвитку. На відміну, наприклад від металу, бетони менш чутливі до концентраторів напруг. При всебічному стисненні гідростатичний тиск не тільки затримує виникнення тріщин, але й сприяє їх закриттю. Так, у [196] досліджувалися бетонні циліндри при одночасній дії осової стискаючої сили і бічного гідростатичного тиску. Отримане сімейство кривих $\sigma - \gamma$ при різних значеннях бічного тиску показано на рис. 1.22. Із графіків видно, що зі збільшенням бічного тиску зростає величина стискаючого осового зусилля, яке перевищує межу міцності бетону при осовому стисненні.

На рис. 1.23 для тих самих бетонних циліндрів показана зміна об'ємної

деформації θ від величини діючих напруг σ .

З рисунку видно, що спочатку об'єм стисливого циліндра зменшується, але при навантаженні, що дорівнює 75-85% від його руйнівної величини, він починає зростати і потім перевищує початкове значення. Аналогічні результати були отримано в [196].

У бетоні до рівня напруженого стану, що визначається параметром R_t° , деформації вважаються пружними. При подальшому активному навантаженні вони складають тільки частину загальної деформації. Пружні властивості бетону як ізотропного середовища характеризуються початковим (миттєвим) модулем пружності E_0 і коефіцієнтом Пуассона γ .

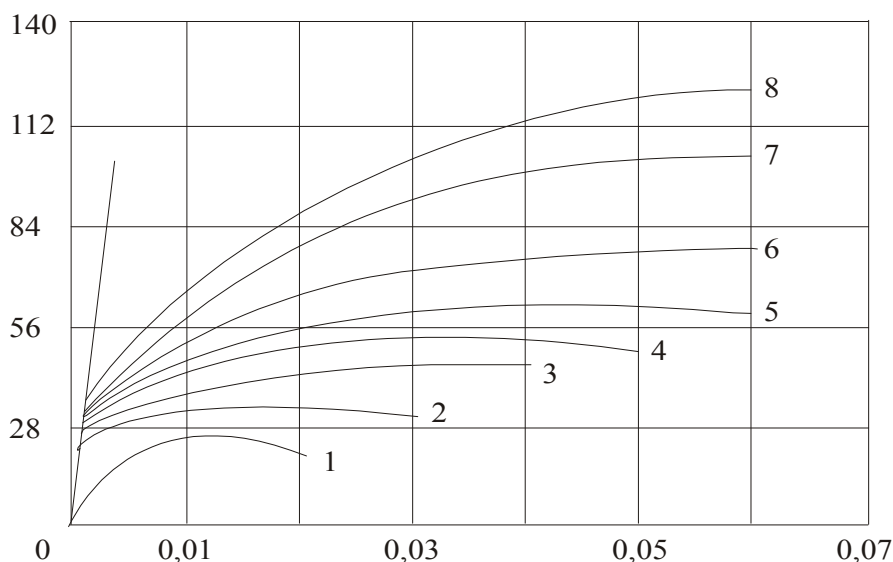


Рисунок 1.22. Залежність $\sigma - \gamma$ для бетонних циліндрів при бічному тискові: 1) -1,25 МПа; 2) -3,75 МПа; 3) -5,5 МПа; 4) -7,6 МПа; 5) -10,5 МПа; 6) -14,6 МПа ; 7) -21 МПа; 8) -28,5 МПа.

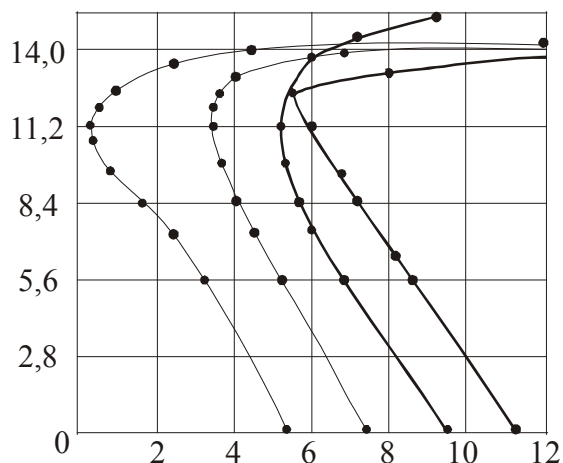


Рисунок 1.23. Зміна об'ємної деформації бетонних циліндрів

Модуль пружності, визначений при розтягуванні, близький за значенням до модуля пружності, визначеного при стисненні. Він інтенсивно наростає в першу половину місяця після виготовлення бетону і не залежить від розміру зразків. Значний вплив на нього надають умови його твердіння і дія підвищених або знижених температур. При малоциклових повторних впливах, коли напруги не перевершують величини $R_{т_1}$, яка є межею утворення незворотних мікротріщин, початковий модуль майже не змінюється. При перевищенні значення $R_{т_1}$ його величина знижується. Величина модуля пружності істотним чином залежить від міцності бетону. Вплив цих та інших факторів на значення модуля пружності бетону викладено і узагальнено в [125].

Зв'язок між поздовжніми і поперечними деформаціями в суцільних середовищах встановлюється через коефіцієнт Пуассона. При пружних деформаціях для бетонів він приймає початкові значення, рівні $V_0 = 0,15 - 0,2$. При розтягуванні зі збільшенням рівня напруг він зменшується. При стисненні, навпаки він зростає до $0,5$, а іноді і перевищує цю величину, що для суцільних середовищ теоретично неможливо. Практично це викликано тим, що при інтенсивному навантаженні зразків бетону відбувається процес тріщино-утворення і порушення суцільності, і фактично обсяг зразка збільшується не за рахунок збільшення обсягу його матеріалу, а за рахунок утворених пустот. Тому процес мікроруйнування в бетоні

характеризується зміною ряду параметрів, одним з яких є коефіцієнт поперечної деформації. На рис. 1.24 показано його зміну на прикладі трьох зразків [174]. Коефіцієнт спочатку з ростом навантаження був майже постійним, потім з рівня напруг, рівного приблизно величині $0,6 R_{np}$, він почав зростати. Це пов'язано зі швидким розвитком тріщин і, як наслідок, з інтенсивним збільшенням об'єму.

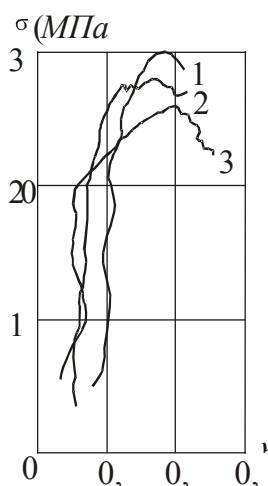


Рисунок 1.24. Зміна коефіцієнту ν зі збільшенням напруг;

1, 2, 3 – номери зразків

Для бетону найбільш вивчений процес його руйнування при стисненні. Після досягнення межі R_t^v , яка зазвичай відповідає значенню $\nu=0,5$, спостерігається інтенсивне утворення в зразках поздовжніх тріщин. При цьому середня розтягуюча напруга в поперечному напрямку зростає до R_n , матеріал зразків сильно розпушується і відбувається їхнє руйнування від подолання опору відриву. Такий стан бетону приймається як позамежний [3]. Але в деяких експериментах на стискання спостерігається руйнування зразка похилою поверхнею, причому кут нахилу становить від 10° до 20° і він відрізняється від кута нахилу октаедричного майданчика. У цьому випадку руйнування носить складний характер, але не є руйнуванням від зсуву.

У [76] зазначено, що в механізмі руйнування бетону можна виділити два вихідних типи руйнування: відривний і зсувний. Наприклад, майже чисто відривний механізм реалізується при розтягуванні зразків. При складному напруженому стані

механізми руйнування бетону мають змішаний відривно-зсувний характер. Утворення і розвиток магістральних тріщин може включати й об'єднувати різноманітні тріщини відриву і зсуву.

Хоча макроскопічна картина руйнування бетону від відриву й зсуву знаходить дослідне підтвердження, але це уявлення про механізм руйнування не є твердо сталим. Існують й інші точки зору на проблему міцності бетону [20, 57, 85, 89].

На підставі вищевикладеного можна підвести підсумки. Феноменологічні теорії міцності для випадків складного напруженого стану повинні задовольняти основні положення механіки, бути зручними для практичного застосування і, головне, їхні результати повинні задовільно узгоджуватися з експериментальними даними.

Залежність деформування бетону від виду напруженого стану була відзначена в багатьох дослідженнях [20]. Отже, співвідношення, що зв'язують деформації з напругами, повинні містити три інваріанти $\sigma_0, \bar{\sigma}, \psi$. Графік на рис. 1.23 показують, що зміна об'єму бетону пов'язана з явищем дилатансії, яку необхідно враховувати при визначенні напружено-деформованого стану від зовнішніх впливів. При одновісному напруженому стані початок утворення пластичних і псевдопластичних деформацій у бетоні встановлюється параметрами R_t^0 і R_t^v , які в просторі напруг представляються точками. При просторовому напруженому стані вони повинні бути зображеними поверхнями, які є геометричним місцем точок, що дорівнюють межам текучості при різних напружених станах і які при активному навантаженні можуть розширюватися і переміщатися. Бетон належить до квазікрихких матеріалів і займає проміжне положення між пластичними і крихкими представниками деформованих середовищ. Тому при складному напруженому стані навряд чи можливе руйнування тільки від нормальних напружень (відрив) і дотичних (зсув). Як показують дослідні дані, починаючи з певного рівня, дотичні напруги роблять розпушення бетону зі збільшенням його об'єму, а поширення тріщин відбувається під дією нормальних напруг.

Зазначені особливості бетону дозволяють вважати, що його деформування, як

однорідного і, спочатку, ізотропного середовища, буде найбільш повно враховуватися теорією пластичної течії з кінематичним зміцненням. Ця теорія дозволяє при складному навантаженні через функцію навантаження врахувати вплив на напружено-деформований стан бетону трьох інваріанти $\sigma_0, \bar{\sigma}, \psi$. Необхідність такого підходу підтверджується експериментальними даними [125].

1.3.3. Метали

Інформація про механічні властивості металів міститься в багатьох монографіях і довідниках. У найбільш систематизованому викладі результати зазначених досліджень наведено в [2, 99, 103, 119, 137, 142]. Тому тут розглянемо основні проблеми, що виникають при випробуванні металів в умовах складного напруженого стану.

Аналіз результатів експериментів П. Бріджмена [10] щодо всебічного стиску металів показав, що залишкові зміни зразків при малих тисках (до «порогового тиску») практично дорівнюють нулю. Для сталей при деформуванні до 13,5% залишкова зміна об'єму складала всього 0,012%, тобто зміна об'єму навіть після таких деформацій майже не відбувається. Але при перевищенні «порогового тиску» спочатку спостерігається зростання пластичних деформацій, які потім зі збільшенням тиску зменшуються.

Як і для бетону при одновісному стисненні металів спостерігається збільшення об'єму. Досліди, виконані А.Г. Гур'євим на суцільних зразках зі сталей марки 10, 15, 30, 40, 45 і 48, показали, що при їхніх деформаціях 5% коефіцієнт поперечної деформації дорівнював величині ν . Аналогічні результати були отримані в дослідях А.М. Жукова, М.М. Давиденкова, Д.М. Василькова. Отже, коефіцієнт поперечної деформації при великих пластичних деформаціях зростає, наближаючись до граничного значення рівному $\nu = 0.5$.

Перевірці гіпотези про існування узагальненої кривої у вигляді діаграми «інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій» або «максимальне дотичне напруження – максимальний зсув», а також вивченню впливу параметрів напруженого стану на їхній вид присвячено велику кількість неоднозначних робіт.

Так, отримані суперечливі результати про вплив гідростатичного тиску на зміну узагальнених кривих. У дослідях С.І. Ражнера, М.Н. Хохоева, Ю.І. Ягна та І.О. Чаплинського було встановлено, що зі зміною інваріанта змінювалися й узагальнені криві. Такі зміни напруження можуть досягати 10%. А в експериментах В. Гроссланда, навпаки, показано, що ці криві не залежать від інваріанта напруг σ .

У дослідях Є. Девіса, Ю.І. Ягна, І. Марина і Я.І. Френкеля встановлено, що криві залежності інтенсивностей напруг і деформацій при різних значеннях параметра Лодє μ_σ не збігаються. Отже, якщо в цих співвідношеннях буде включений третій інваріант девіатора напруг, то вони не будуть задовольняти постулату ізотропії, який покладено в основу теорії пружних процесів О.А. Ільюшина [69]. Гіпотеза про пропорційність девіаторів напруг і деформацій при великих деформаціях не підтверджується дослідними даними. Встановлено факти впливу виду девіаторів та $\mu_\sigma \neq \mu_\gamma$ на зміцнення пластичних матеріалів. Тому узагальнені криві не можна розглядати як універсальні залежності для таких матеріалів. Необхідно враховувати їхні специфічні властивості шляхом введення у визначальні рівняння та інших характеристик напруженого або деформованого стану.

О.А. Ільюшиним було теоретично доведено, що теорія малих пружно-пластичних деформацій і теорія течії при простому навантаженні дають однакові результати. Експериментальні дані, наведено в [103, 136], підтверджують це твердження. Теорія малих пружно-пластичних деформацій не залежить від впливу історії навантаження на деформований стан матеріалу, а тільки від початкової й кінцевої точок траєкторії деформації. Теорія течії, навпаки, враховує вплив траєкторії навантаження на процес деформування навколо кожної матеріальної точки. Тому в разі складного навантаження в обох теоріях виходять різні результати.

Досліди, проведені А.М. Жуковим в умовах складного навантаження зі збереженням орієнтації осей тензора напруг, показали, що в цьому випадку при зростанні інтенсивності напруг можна застосовувати деформаційну теорію

пластичності. Це також підтверджують експерименти І. Марина і Л.В. Ху. При цьому, граничні напруги, що передують руйнуванню, при простому і складному навантаженнях практично збігаються.

Якщо складне навантаження супроводжується різким поворотом головних осей, то деформаційні теорії пластичності дають істотну розбіжність з експериментальними даними. Щодо теорії пластичної течії наводяться суперечливі результати. У ряді робіт стверджується, що результати цієї теорії досить повно відображають вплив історії навантаження (В.З. Паллей). В інших роботах наводяться експерименти, дані яких не узгоджуються з результатами цієї теорії (А.М. Жуков, Д. Марін, Р.М. Naghdi, І С. Rowley). Так, наприклад, вона не пророкує зміну пружних властивостей матеріалу при пластичній деформації (А.М. Жуков, В.О. Свешніков).

Дослідами М. Роша й А. Ейхінгера, присвяченими випробуванню сталевих зразків на розтягування і кручення показано, що умова Мізеса краще виконується в області, що передує пластичним деформаціям, але при розвинених пластичних деформаціях у кращій відповідності з дослідом перебуває умова Кулона. Експериментами А.М. Жукова, П.С. Істоміна, Г.Б. Талипова, L.W. Hu, I.F. Bratt, І. Марін та ін. встановлено, що стану течії краще відповідає умова Мізеса, а критерію руйнування – умова Кулона. Досліди В.М. Бастуна, М.І. Черняка показали, що форма граничної поверхні залежить від попередньої пластичної деформації, й з її збільшенням відбувається розширення та зміщення поверхні в напрямку попереднього деформування. С. Філіпсом встановлено, що умовою утворення кутової точки на поверхні навантаження є різка зміна напрямку вектора приросту напружень.

Граничний напружений стан для крихких металів вивчався в багатьох роботах [103, 119]. Такі матеріали мають більш високий опір стисненню в порівнянні з опором при розтягуванні. Вони зазвичай не мають майданчика течії й руйнуються без помітної пластичної деформації. Численні експериментальні дані підтвердили, що руйнування таких матеріалів добре описується узагальненим критерієм Писаренка-Лебедева [119, 137], який включає тільки дві константи матеріалу, що

визначаються з дослідів на розтяг і стиск зразків. Цей критерій, як показано в [119], поширюється на анізотропні і неоднорідні матеріали.

У висновку слід ще раз підкреслити, що зазначені вище властивості металів підтверджуються численними досвідченими даними, представленими у вигляді графіків, діаграм і таблиць, які наведено і найбільш повно узагальнено в [99, 119, 137].

Приблизно така ж ситуація зберігається з визначенням критерію міцності. Розроблено цілий ряд різних теорій, ґрунтовний огляд і аналіз яких наведено в [3, 23, 119, 137, 153]. Вважається, що найбільш обґрунтованими для ґрунтових середовищ є теорії Кулона-Мора і Боткіна. Для скельних порід і бетону такими критеріями є теорії Генієва, і також перспективною на наш погляд є теорія Писаренка-Лебедева, яка теоретично пояснює природу руйнування бетону, але потребує експериментального обґрунтування. Ця теорія також є найбільш прийнятною для крихких металів. Для пластичних металів, які однаково працюють на розтягнення і стиснення, найбільш обґрунтованою є теорія Мізеса.

Функції навантаження в процесі пружно-пластичного деформування повинні забезпечити безперервний перехід із дограничного стану матеріалу до його граничного стану. В цьому випадку вони можуть бути представлені такими ж функціями, що і умови міцності, але повинні містити параметри, що характеризують пружно-пластичні властивості матеріалів, а не їх аналоги міцності. Також має бути враховане зміцнення. Тому умови міцності можуть бути використані в якості функцій навантаження із зазначеними поправками.

1.4. Розрахункові моделі і методи розрахунку кріплень котлованів і фундаментів існуючих і проектованих споруд

Щодо розрахунку котлованів біля існуючих будівель видано не дуже велику кількість робіт, наприклад [41, 48, 81, 128, 138]. Іноземні літературні джерела наведені в монографії [81]. Щодо розрахунку підпірних споруд, які дуже часто використовуються для кріплення стінок котлованів, навпаки опубліковано значну кількість монографій та статей. Їх перелік і аналіз наведено, наприклад, у [45, 78,

172]. З останніх робіт цього напрямку можна відзначити [5, 26, 44, 51, 54, 77, 110, 132].

Наразі існує два основних напрямки у вирішенні задач розрахунку котлованів і кріплень їхніх стінок. Численні методи першого з них базуються на теорії граничного стану [45, 54, 77, 78, 141, 160, 172]. За цією теорією визначається тільки напружений стан середовища в припущенні, що все воно знаходиться в граничному стані, що не відповідає реальному становищу. Питання дійсного розподілу напружено-деформованого стану в околі будь-якої точки залишаються відкритими або, в окремих випадках, вирішуються методами лінійної теорії пружності, яка є майже завжди незадовільною моделлю реальних ґрунтів, що володіють в основному в'язкими і пластичними, а також неоднорідними властивостями. Тому постало питання про розробку нових розрахункових схем, що враховують більш повно природні властивості ґрунтових середовищ. Нечисленні методи другого напрямку, які інтенсивно розробляються наразі, дозволяють визначати з розрахунку в будь-якій точці ґрунтового масиву або підпірної конструкції, як напруги, так і деформації, що є важливим чинником при вивченні стану схилів і укосів, або при використанні отриманих результатів для оцінки можливості будівництва на них. Вони розрізняються моделями ґрунтового середовища і визначенням поняття граничного стану. Пропоновані тут методи розрахунку відносяться до цього напрямку.

Інтенсивний розвиток обчислювальної техніки, що відбувається наразі, спільно із запитами практики щодо вдосконалення досліджень зсувних процесів, дали поштовх розвитку методів розрахунку другого напрямку, вихідні рівняння яких мають більш складний вигляд і можуть бути реалізовані в основному тільки із застосуванням ЕОМ. Методи цього напрямку дозволяють за визначеними з розрахунків напруг і деформацій з єдиних позицій проводити оцінки котлованів, їхніх кріплень і раніше побудованих будівель, розташованих поруч, за рекомендованими в нормативних документах двом групам граничних станів. На сьогодні різні методи цього напрямку подано в роботах [3, 42, 61, 132, 147, 149].

Основна відмінність методів цього напрямку від методів першого напрямку полягає в побудові розрахункових моделей для визначення напружено-

деформованого стану ґрунтового середовища спільно з кріпленням стінок котлованів при більш повному використанні таких реальних властивостей будівельних матеріалів і ґрунтів, як пружність, в'язкість і пластичність у сухому й водонасиченому стані. Найбільш повно властивості таких моделей викладено в монографіях [48, 61].

В якості кріплення стінок котлованів можуть використовуватися різні підпірні стіни. В даний час існує кілька докладних розробок щодо їхнього розрахунку [3, 45, 51, 78, 172] від тиску ґрунту і прикладених навантажень. Виконані роботи в основному можна згрупувати за двома напрямками:

- дослідження тиску ґрунтового середовища на стіни;
- розрахунок стін від зазначеного тиску і прикладених навантажень.

Дослідження з визначення тиску ґрунтів на стіни можна поділити, в свою чергу, теж на дві основні групи:

– недеформаційні, в яких не встановлено зв'язок між напругами і деформаціями, але деякі з них модифіковані таким чином, що дозволяють частково враховувати кінематичні фактори;

– деформаційні, в яких вводяться рівняння стану, якими встановлені залежності між напруженнями і деформаціями або між їхніми приростами, що можуть бути лінійними або нелінійними.

У теорії Кулона розглядається затверділа призма з плоскими сторонами, що сповзає в ґрунтовому середовищі, в кожній точці поверхні ковзання якої виконується умова пластичності Кулона-Мора. В теорії граничного напруженого стану приймається, що зазначена умова пластичності має місце для кожної точки ґрунтового середовища. В результаті виходить не плоска, а криволінійна поверхня ковзання в ґрунті, що складається в перерізі з відрізків логарифмічних спіралей і прямих.

Теорії, віднесені до першої групи, можуть бути використані тільки для перевірки несучої здатності системи стіна-ґрунт. Тому визначити напружений стан у рамках цих теорій неможливо. Були зроблені модифікації теорій шляхом введення деяких кінематичних співвідношень при збереженні основних передумов. Так

вдалося домогтися перерозподілу тиску ґрунту, особливо у випадку гнучких стін, але при цьому треба було ввести ряд додаткових припущень, пов'язаних із введенням нових параметрів. До таких робіт відносяться [45, 172]. Були також зроблені спроби введення різних поправочних коефіцієнтів і виправлень епюр тиску ґрунту для приведення їх у відповідність із дослідними даними. Такий підхід породив цілий ряд спрощених методів розрахунку тиску ґрунту, опис яких наводиться в [45]. Найбільша популярність теорій цієї групи була викликана тим, що в часи, коли була відсутня серйозна обчислювальна техніка, вони дозволяли досить просто визначати тиск ґрунту на стіни. Однак оцінити реальний напружено-деформований стан, в якому знаходяться експлуатовані споруди або будуть перебувати проектовані, ці теорії не дозволяють.

Теорії тиску ґрунту на стіни, віднесено до другої групи, і є набагато складнішими за попередні. Так контактна вінклерівська модель ґрунтового середовища для розрахунку шпунтових стін дозволяла визначати напружено-деформований стан в окремих точках ґрунту, що контактують зі стінкою. Потому було написано ряд робіт, присвячених застосуванню цієї моделі з різними уточненнями [110, 26]. Така модель має обмежену область застосування, вона не враховує передачу тиску на стіну від навантажень, що діють на ґрунт, і від власної ваги ґрунту, не забезпечує перерозподіл тиску залежно від утворення в ґрунті пластичних областей.

Останнім часом, як вже зазначено вище, починає розроблятися найбільш прогресивна пружно-пластична модель, що базується на теорії пластичного протікання, яка дозволяє:

- врахувати як пружні, так і пластичні властивості ґрунтового середовища і матеріалу підпірної стіни;
- врахувати процеси складного навантаження;
- розглядати стіну і ґрунт як єдину спільну розрахункову систему і визначати в будь-якій її точці напружено-деформований стан.

На сьогодні опубліковано велику кількість розрахунків щодо підпірних гнучких і гравітаційних стін. Їх можна поділити на роботи, виконані без

застосування та із застосуванням сучасної обчислювальної техніки. У розрахункових алгоритмах першої групи, крім припущень, що відносяться до моделей ґрунтового середовища, введені додаткові припущення, пов'язані з моделями стін і з методами розрахунку. Їхній аналіз наведено в [45, 78, 172]. У даний час деякі з цих методів використовуються для попередніх розрахунків. Наприклад, для розрахунку шпунтових стінок у гідротехнічних спорудах широко застосовується графоаналітичний метод Блюма-Ломейєра [45, 121]. У цьому методі активний і пасивний тиск ґрунту визначається за теорією Кулона з множенням на поправочні коефіцієнти, що враховують тертя ґрунту об стіну. Зусилля в шпунтовій стіні обчислюється графоаналітичним методом. Максимальна глибина забивання знаходиться в тому місці пружної лінії шпунта, де її кривизна дорівнює нулю. У цьому методі не враховується перерозподіл тиску ґрунту по висоті стіни, викликане її переміщеннями, що призводить до завищення зусиль у шпунті. Завищеними виявляються реакції в анкерах і глибина забивання шпунта.

У роботі [147] досліджується напружено-деформований стан системи «підпірна споруда-ґрунтовий масив» із урахуванням послідовності провадження робіт і розробки методики прогнозу тиску ґрунту на підпірні споруди в залежності від їхніх зміщень.

На основі математичної моделі ґрунту, що базується на теорії пластичної течії зі зміцненням, при використанні чисельних методів розроблена методика розрахунку тиску ґрунту на підпірні споруди. Дана розрахункова оцінка визначає вплив контактного тертя на значення тисків ґрунту на підпірні споруди. Зіставлені результати розрахункового визначення тиску ґрунту на підпірні споруди за розробленою методикою з даними експериментальних досліджень. Проаналізовано результати досліджень тиску ґрунту на тонкі підпірні стінки, отриманні при розрахунку даним методом.

У роботі [132] досліджено взаємодію огорожі котловану і ґрунтового масиву в натурних умовах і дана оцінка достовірності сучасних інженерних і чисельних методів розрахунку розкріплених огорож котлованів в інженерно-геологічних умовах Санкт-Петербурга.

Проведено натурні спостереження на дослідному майданчику та отримано дані про систему «огородження котловану – масив ґрунту». Виконано порівняння даних експериментальних досліджень з результатами розрахунків, проведених різними методами. Обґрунтований вибір нелінійної моделі пружно-пластичного ґрунту для розрахунку взаємодії огорожувальних конструкцій і масиву ґрунту, а також запропоновано алгоритм підбору її параметрів.

Виконана оцінка достовірності прогнозу зміни напружено-деформованого стану огородження котловану і масиву ґрунту з використанням різних методів розрахунку, обґрунтований вибір пружно-пластичних моделей ґрунту для проведення чисельного моделювання ситуації на дослідному майданчику. Розглянуто наступні моделі: ідеально пружно-пластична модель з критерієм міцності Кулона-Мора (модель Кулона-Мора), нелінійна пружно-пластична модель Шашкіна К.Г., Шашкіна А.Г., реалізована в програмі FEM-Models, нелінійна пружно-пластична модель Hardening Soil Model, реалізована в програмі Plaxis.

У роботі [44] проведено порівняння отриманих із використанням декількох геотехнічних програмних комплексів (ФОК-ПК Парус, PARIS, Plaxis 2D, Plaxis 3D Foundation) результатів на основі розрахунку огородження котловану в м. Київ. Зазначено, що в ПК PARIS застосовувався метод переміщень, що використовує матриці жорсткості. У ПК Plaxis 2D використовувалася пружно-пластична модель Мора-Кулона. У більшості розглянутих елементів огорожі заміряні фактичні переміщення виявилися меншими за своєю величиною, ніж розрахункові.

Аналізуючи роботи, що відносяться до спільного розрахунку систем, до яких належать котловани, кріплення їх стінок і раніше побудовані будівлі, слід зазначити:

- досліджень в такій постановці, яка означена в даній роботі, з урахуванням спільної роботи всіх перерахованих вище елементів системи, не знайдено;

- у більшості робіт із визначення переміщень таких систем розглядаються в основному питання обчислення активного і пасивного тиску на кріплення стінок від ґрунтових середовищ;

- найбільш прогресивними для оцінки напружено-деформованого стану розглянутих систем є деформаційні моделі, які можна використовувати також для

перевірки їх несучої здатності в умовах будівництва і експлуатації;

– у зв'язку з розвитком обчислювальної техніки і насиченням нею проектних і будівельних організацій нераціонально розробляти програмне забезпечення, засноване на спрощених методах розрахунку, в яких для отримання чисельних результатів при ручному рахунку були введені серйозні спрощувальні припущення;

– при розробці нових програмних комплексів, призначених для розрахунку стійкості схилів і укосів спільно з протизсувними конструкціями, необхідно найбільш повно враховувати особливості роботи таких систем, реальні властивості матеріалів конструкцій і ґрунтового середовища та спільну роботу всіх їх елементів.

1.5. Огляд розрахункових моделей механічної поведінки ґрунтів

Різноманітність видів ґрунтів та особливостей їхньої поведінки при роботі під дією різних факторів привели до створення великої кількості моделей ґрунтів при відсутності єдиної моделі – «універсальної». При цьому яка-небудь модель опису явищ, характерних для ґрунтових підстав, повинна [148]: 1) забезпечувати виконання законів і принципів механіки твердого деформівного тіла; 2) відображати характерні особливості даного виду ґрунту, що виявляються при його поведінці в різних умовах; 3) визначати зв'язок між напруженнями і деформаціями. Крім того, однією з важливих умов успішної побудови прикладної моделі є достовірний опис фізико-механічних параметрів, що входять в її розрахунковий апарат.

Поділ моделей ґрунтів на різні класи не завжди може бути однозначним [152], тому що в одній моделі можна знайти не тільки характеристики різних напрямків, але і багато класифікаційних ознак, причому ці ознаки складним чином взаємозалежні і не є незалежними.

Найбільш загальний поділ всіх моделей проводиться за ознакою: входить чи не входить до їхнього рівняння час. Моделі, що враховують тимчасові ефекти, називають реологічними або t-моделями. Їх отримують зі статичних моделей додаванням в'язкості (як у моделях Максвелла або Бінгама) в тій чи іншій формі. Є більш складні t-моделі, які не виводять безпосередньо з статичних моделей. До них примикає розгляд взаємодії скелета ґрунту з поровою водою. Реологічні моделі

ґрунтів розглянуто в працях С.С. Вялова, Ю.К. Зарецького, М.М. Маслова, С.Р. Месцяна, З.Г. Тер-Мартиросяна, В.А. Флоріна, В.Г. Шаповала, Л. Шукле та ін. [18, 60, 95, 144, 171].

В іншому загальному поділі моделей виходять з того, що ґрунт є не суцільним, а дискретним середовищем (мікропідхід). Його реальним відображенням може бути модель, яка б статистично описувала взаємодію окремих частинок з урахуванням фізичного виду зв'язків між ними. Найбільш відомим результатом напрямку є імітаційна імовірнісна модель В.І. Кандаурова [74], яка розглядає розподіл напружень у дискретному сипучому середовищі, на основі статистичного аналізу силової взаємодії частинок, які контактують і взаємно прослизують. Певною популярністю користується і модель Р. Роу, що описує деформування середовища з шарів, на контакті між якими діють сили тертя, і інші моделі дискретної середовища для сипучих матеріалів і пісків Б.В. Дідуха, Б.В. Кулачкіна, Р.А. Муллер, Р.В. Покровського, М. Харра [52, 87, 152]. Слід зазначити, що практична теорія дискретного деформування ґрунтів ще не створена.

Альтернативою є макropідхід, заснований на гіпотезі непривабливості (континуумі) середовища. Розглядають напруги і деформації нескінченно малих обсягів та використовують апарат диференціального обчислення, що дозволяє вивчати НДС всього масиву.

Огляди континуальних моделей ґрунтів робили А.К. Бугров, Р.А. Генієв, М.Н. Гольдштейн, К.Ю. Зарецький, Ю. Мурзенко, В.М. Ніколаєвський, А.М. Рижов, С.Ф. Клованич, А.А. Петраков, З.Р. Тер-Мартиросян, С.Б. Ухов, В.М. Уліцький, В.Р. Федоровський, Д.М. Шапіро, D. Bratisin, W. Chen, D. Druker, J. Mechi, T. Nakai, W. Prager та ін. [19, 24, 29, 59, 60, 97, 115, 122, 124, 127, 129, 148, 152, 161, 165, 178, 179, 180, 182, 183, 184, 189, 190, 192]. Виділяють моделі: лінійно деформованого середовища; нелінійно-пружні; теорії граничної рівноваги; пружно-пластичного середовища і теорії пластичного перебігу; ті, що базуються на концепції критичного стану ґрунтів тощо.

У моделях лінійно-деформівного середовища [47, 70, 86, 97, 157, 198], крім одноразового завантаження ґрунту і лінійної залежності між напруженнями і

деформаціями при навантаженні, розглядають тільки його загальну деформацію без поділу на пружну і пластичну складові. Перше припущення дає можливість при розрахунках напруг у масиві використовувати теорію пружності, а друге – при відомих напругах визначати кінцеві деформації основи.

Головний недолік нелінійно-пружних моделей – неможливість врахування залежності деформованого стану від траєкторії навантаження. У разі порушення подібності й співвісності тензорів напруг і деформацій їхнє застосування – неправомірне.

Моделі теорії граничної рівноваги ґрунту відповідають умовам, коли у всіх точках середовища виконується умова граничної рівноваги, а в елементах масиву переважають пластичні деформації. Це відповідає моделі жорстко-пластичного тіла. Припускають, що лінійна (пружна) частина переміщень дуже мала в порівнянні з пластичною складовою. Фізичні рівняння описують граничний напружений стан. Завдання вирішують як статично визначене. Переміщення не знаходять (модель не містить співвідношення між напругами і деформаціями). Визначають тільки граничне навантаження. Модель дає задовільні результати тільки за умови сталості значень характеристик міцності і деформативності ґрунтів усіх елементів масиву в будь-який момент роботи. Між тим, у загальному контексті ці показники змінні як по глибині і в плані, так і при зміні тиску на ґрунт.

Тому часто в розрахунках використовують вирішення змішаної задачі теорії лінійно деформованого середовища і граничної рівноваги. Згідно нього (моделі Б.І. Дідуха, О.Л. Крижанівського, Ю.Н. Мурзенко, З. Мруза, К. Роско, А. Скофільда тощо) рівняння рівноваги виконуються по всьому розглянутому масиву, рівняння спільності – у пружній області та рівняння граничної рівноваги – в області пластичних деформацій. Значення механічних властивостей ґрунтів моделі В.М. Ніколаєвського, І.П. Бойка, А.К. Бугрова, А.А. Петракова, Д.М. Шапіро та ін. коригують урахуванням швидкості дилатансії [7, 8, 29, 101, 105, 114, 115, 116, 117, 164, 165, 166].

Моделі пружно-пластичного середовища та теорії пластичної течії базуються на диференціальних співвідношеннях між напруженнями і деформаціями й можуть

враховувати закономірності зміни механічних властивостей ґрунту, як у процесі експерименту, так і в натурних умовах. Для цього в систему рівнянь пружно-пластичних деформацій вводять функції, що враховують змінювані згідно експерименту значення модулів зсуву G , об'ємної і загальної деформації, коефіцієнтів Пуассона. Ці варіанти пружно-пластичних середовищ відносять до деформаційних теорій. Компоненти деформацій і напруг поділяють на пружні і пластичні складові. Пружні складові деформацій описують диференціальними рівняннями рівноваги, рівняннями безперервності та теорії пружності, а пластичні складові – диференціальними співвідношеннями деформацій і напружень.

Моделі ґрунту, засновані на теорії пластичності, поділять на: ідеально-пластичні (з фіксованою поверхнею плинності) і ті, які зміцнюються; з однією і багатьма поверхнями навантаження; з єдиною (гладкою) і складовою (негладкою) поверхнею навантаження; ті, які підпорядковані асоційованому та неасоційованому закону пластичного протікання.

Ідеально-пружно-пластична модель з єдиною поверхнею плинності (типу Губера-Шлейхера) й асоційованим законом течії, запропонована Д. Друккером і В. Прагером [180], була першою моделлю нелінійної поведінки ґрунтів у сучасному розумінні. Її недоліки: 1) асоційований закон щодо умови міцності Губера-Шлейхера (і Кулона-Мора) перевищує дилатансію ґрунтів; 2) модель не враховує пластичні деформації в дограничному стані, зокрема об'ємні деформації. Тому Д. Друккер розробив модель зміцнюючого ґрунту, замкнувши конус Губера-Шлейхера сферичним ковпачком, який перетинає гідростатичну вісь у просторі головних напруг. Ковпачок зсувається при пластичному об'ємному деформуванні. Це приклад моделі зі складовою поверхнею навантаження. Коли точка, яка описує напружений стан, знаходиться на стику конуса і ковпачка, пластичні деформації визначаються відразу двома потенціалами пластичності за Койтером, завдяки чому дилатансія навіть на поверхні Губера-Шлейхера в середньому менша, ніж у моделі Друккера-Прагера.

Досить поширеною є модель ідеального пружно-пластичного тіла (діаграми Прандтля), яка з'єднує рівняння лінійно деформованого і жорстко-пластичного тіл.

У цій моделі межі пропорційності, плинності і міцності збігаються, що відповідає формами фізичної нелінійності, що проявляються в безперешкодній деформації при граничному напруженому стані: текучості, повзучості, односторонніх зв'язках.

Цей клас моделей дає більш точні результати за рахунок більш чіткої фіксації напруг і деформацій в той чи інший момент навантаження ґрунту. До його проблем відносять використання припущення про ізотропність середовища та опис середовища, яке або тільки зміцнюється, або тільки стає менш міцним, а іноді – і припущення щодо грубої апроксимації процесу дограничного деформування ґрунтів за пружною схемою [148, 150, 151, 168].

Моделі, засновані на концепції критичного стану ґрунту (або КС моделі) – відносно нова група моделей, заснованих на закономірностях поведінки ґрунту при зсуві, зокрема зміну його щільності від початкової до критичної. На сьогодні найбільш відомі дві схеми цих моделей. Перша (моделі В.Н. Ніколаєвського, «Cam-clay» Скофільда-Рота і К. Роско тощо) [96, 177], коли в розрахунок пружно-пластичних деформацій вводять залежність між швидкістю зміни обсягу і механічними характеристиками ґрунтів. У систему розв'язуваних рівнянь включають: диференціальні рівняння рівноваги; рівняння граничної рівноваги; залежність, яка коригує механічні властивості ґрунтів при пластичних деформаціях.

Друга схема (А. Казагранде, М.Н. Гольдштейна [24], А.М. Рижова [129], Д.Ю. Соболевського [134]), коли механічні властивості ґрунту визначають безпосередньо за фіксованими в даний момент часу значеннями щільності природного складу і критичної щільності. У систему розв'язуваних рівнянь входять рівняння зв'язку між: 1) початковими і кінцевими значеннями деформацій; 2) початковими і кінцевими відносними напруженнями; 3) безрозмірними параметрами деформацій і напружень, а також умови граничної рівноваги. Переваги КС-моделей – в можливості опису з єдиних позицій, як зміцнення, так і знеміцнення ґрунтів при деформуванні, а також розвиненої течії глинистих ґрунтів, у тому числі лесів [152].

Переваги анізотропної моделі ґрунтів над ізотропною моделлю отримали розвиток у працях В.П. Бойка, А.К. Бугрова, Р.А. Генієва, М.Н. Гольдштейна, М.Ф. Друкованого, А.А. Коробової, В.В. Ковтуна, В.В. Лушнікова, А.А. Петракова,

Л.М. Тимофєєвої, С.І. Цимбала, Г.І. Чорного, А.В. Школи, В.Б. Швеця, В. Amadei, I. Duncan, G. Gazetas, Н. Kulatilake, J. Magnan та ін. [15, 19, 24, 29, 42, 72, 75, 90, 115, 146, 159, 162, 170, 175, 176, 181, 187, 188].

Висновки до розділу 1

Розглянутий аналіз експериментальних даних щодо ґрунтів, бетонів і металів дозволяє зробити наступні загальні висновки.

1. При порівняно невеликих навантаженнях залежність між напруженнями і деформаціями підпорядковується лінійному закону Гука. Зі збільшенням діючих навантажень ускладнюються процеси деформування, і доводиться враховувати пружно-пластичну роботу матеріалів. Однак не існує теорії пластичності, яка б повністю задовольняла основні особливості деформування при складному напруженому стані стосовно до розглянутих тут матеріалів і ґрунтів. Так деформаційні теорії дають задовільні результати тільки при простому навантаженні або при окремому випадку складного навантаження, коли не відбувається повороту головних осей тензора напружень. Теорія пружно-пластичних процесів О.А. Ільюшина, в основі якої лежать постулати ізотропії і пластичності, а також ряд інших гіпотез, що обмежують область її застосування. Тому вона не може відігравати узагальнюючу роль в існуючих теоріях пластичності.

Більш гнучкою по відношенню до використання різних властивостей матеріалів є теорія пластичної течії із зміцненням. Її особливість полягає в тому, що основні характеристики матеріалів враховуються функцією навантаження. Слід відразу зазначити, що єдиної такої функції для будівельних матеріалів і ґрунтів не існує, але є цілий ряд вивчених їх представників, область використання яких визначена експериментальними даними. Їхнє включення в базу даних програмних комплексів для пружно-в'язко-пластичних розрахунків різних конструкцій і споруд дозволить розширити кількість застосовуваних матеріалів. Гнучкість теорії дає можливість включати без особливих труднощів у базу даних нові функції навантаження, розширюючи тим самим коло розв'язуваних задач. Були запропоновані й інші теорії пластичності (наприклад, теорія ковзання), але вони

знаходяться ще в стадії становлення і не мають достатнього експериментального обґрунтування, тому тут не розглядалися.

Проаналізувавши результати цього розділу, слід звернути увагу на вирішення наступних особливо важливих проблем при математичному моделюванні підпірних споруд:

2. Модель підпірної споруди повинна включати в себе, як єдину систему, наступні елементи: 1) безпосередньо підпірну конструкцію; 2) розташовану поруч з нею частину ґрунтового масиву; 3) раніше побудовані або проєктовані на цих ґрунтах споруди; 4) підземні води. Така розширена модель дозволяє найбільш точно визначати її напружено-деформований стан і вирішувати питання руйнування або деформування поруч розташованих і проєктованих споруд.

3 У розрахунках необхідно враховувати роботу елементів моделі підпірної споруди в пружно-пластичному стані. Це викликано тим, що пластичні деформації, що виникають у ній, часто значно перевершують пружні. У зв'язку з цим, така модель повинна бути представлена нелінійними рівняннями, вирішення яких можливе тільки чисельними методами.

4. Напружено-деформований стан підпірних споруд при їх пружно-пластичному деформуванні залежить від послідовності етапів навантаження. Тому найбільш точні результати рішення в прирошеннях виходять при обліку послідовності цих етапів, відповідної технології будівництва підпірних споруд.

РОЗДІЛ 2

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

2.1. Переміщення, деформації і напруги

Мірою кількісної оцінки напружено-деформованого стану матеріального об'єкта є усереднені в його нескінченно малому елементі переміщення, деформації та напруження, що виникають в ньому від дії зовнішніх і внутрішніх сил і приймаються як істинні. Теорія їхнього визначення базується на аксіомах, які приводять теоретичні результати до узгодженості з експериментальними. Так, наприклад, тензори першого і другого порядку, що характеризують напружено-деформований стан середовища, вважаються безперервно диференційованими необхідну кількість разів за координатами і за часом. Отже, вони обмежені разом з похідними в області матеріального об'єкта. Для їхнього визначення необхідно зазвичай вирішувати крайову задачу, що містить систему геометричних, статичних і фізичних рівнянь при початкових і граничних умовах. Спочатку без виведення наведемо перші два типи цих рівнянь. Вони можуть бути використані для будь-яких суцільних деформованих середовищ.

Геометричні рівняння. Під дією зовнішніх сил елемент об'єкта переміщається і деформується, як показано на рис. 2.1.

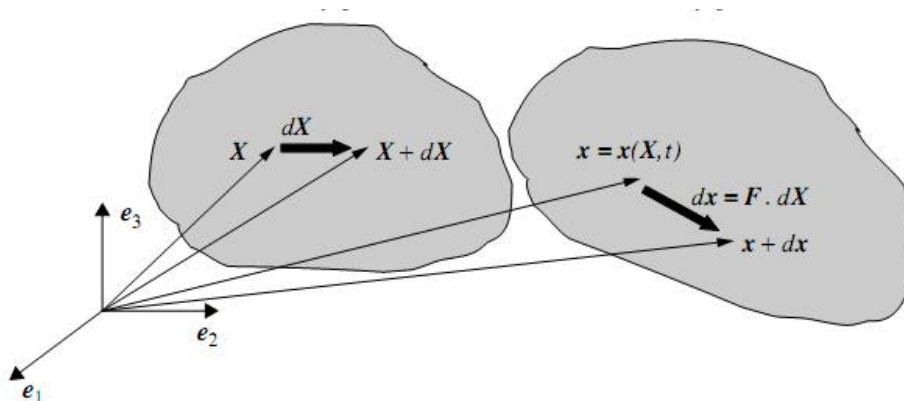


Рисунок 2.1. Переміщення деформованого середовища

Для визначення переміщень частинок, в тривимірному евклідовому просторі введена довільна нерухома прямокутна система координат з ортонормованим базисом e^1, e^2, e^3 , яка не впливає на перебіг фізичних явищ в деформованому середовищі,

і час t . У момент часу $t = 0$ положення такої частинки вихідній конфігурації середовища визначається вектором $\mathbf{X}$, а при $t > 0$ в поточній конфігурації вона фіксується вектором $\mathbf{x}$. Для скорочення запису використовується індексне позначення. Тому ці два вектори визначаються у вигляді

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} = x_i(X_j, t) \mathbf{e}_i, \quad (2.1)$$

де індекси i і j приймають значення 1, 2, 3. Індекси, що повторюються двічі в одному елементі виразу, означають підсумовування за ними від 1 до 3. Індекси, що повторюються у всіх елементах виразу, вказують на кількість цих виразів.

В окрузі частки $\mathbf{X}$ вихідної конфігурації середовища визначається нескінченно малий вектор збільшення $d\mathbf{X}$, приєднаний до частки. У поточній конфігурації він стає вектором $d\mathbf{x}$, який визначається через вектор $d\mathbf{X}$ як

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \mathbf{e}_i, \quad (2.2a)$$

що еквівалентно запису

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.2b)$$

де $\mathbf{F}$ називають градієнтом деформації.

Вектор $d\mathbf{X}$ визначається через вектор $d\mathbf{x}$ і, навпаки, за формулами:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}; \quad d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^t. \quad (2.3)$$

Позначаємо через $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ вектор переміщення частинки з вихідної конфігурації $\mathbf{X}$ в поточну конфігурацію $\mathbf{x}$. Тоді тензор кінцевої деформації Гріна-Лагранжа знаходиться як [13]

$$\Delta = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{X}}^t \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{X}}^t \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}) \quad (2.4a)$$

або в компонентній формі, яка зручна для обчислень, у вигляді

$$\Delta_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (2.4b)$$

При вирішенні багатьох завдань механіки досить вважати деформації малими. В цьому випадку замість тензора деформації Гріна-Лагранжа застосовується лінеаризований тензор деформації, який обчислюється за недеформованою схемою системи і має наступний вигляд

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}); \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.5)$$

Введемо позначення $\epsilon_{ij,k} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k}$. В цьому випадку другу формулу з (2.5) можна уявити більш компактно як

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.5a)$$

Отримані рівняння часто називають співвідношеннями Коші.

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.5b)$$

Статичні рівняння. Під дією зовнішніх сил в кожній точці на гранях нескінченно малого елемента, вирізаного з деформованого середовища, виникають напруження.

Розглядаючи рівновагу елементарного об'єму і проектуючи на осі координат всі діючі на нього сили, отримуємо три рівняння рівноваги, які в компактній формі мають такий вигляд [13]:

$$\sigma_{ij,i} + Q_j = 0. \quad (2.6)$$

Тут всі індекси приймають значення від 1 до 3, а індекс j вказує на номер рівняння (їх три), а за індексом i йде підсумовування першого доданка з (2.6) (в кожному рівнянні цих доданків теж три).

Також за умов рівноваги елементарного обсягу у вигляді тетраедра отримуємо рівняння рівноваги на поверхні S_q , на якій діє навантаження q . Вони мають в компонентній формі наступний вигляд

$$\sigma_{ij} n_i - q_j = 0, \quad (2.7)$$

де n_i проекції на осі координат нормалі до поверхні S_q . Індекси i та j виконують таке ж призначення, що i в попередній формулі.

У припущеннях напруг $d\sigma_{ij}$ і припущеннях навантажень dQ_i , dq_i рівняння рівноваги записуються як

$$d\sigma_{ij,i} + dQ_j = 0, \quad (2.6a)$$

$$d\sigma_{ij} n_i - dq_j = 0. \quad (2.7a)$$

2.2. Рівняння стану

Ці рівняння встановлюють зв'язок між напругами і деформаціями або їхніми прирощеннями і спільно зі статичними і геометричними рівняннями утворюють замкнуту систему, вирішуючи яку, можна визначити напружено-деформований стан в будь-якій частці підпірної споруди. Під час пружно-пластичного деформування в них можуть виникати як пружні, так і пластичні деформації. Для них приймається, що результат деформації не залежить від швидкості процесу навантаження при переході в цей напружений стан. Якщо деформації малі, то виконується постулат підсумовування [67], який дозволяє загальні деформації, а також їх збільшення розділити на пружні і пластичні складові. Його можна представити у вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)}, \quad (2.8)$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(e)} + d\varepsilon_{ij}^{(p)}. \quad (2.9)$$

Тут індекс (e) відноситься до пружних деформацій, а індекс (p) – до пластичних.

Пружні деформації або їхні прирощення визначаються за формулами

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = C_{ijkl}^{(e)} \sigma_{kl}, \quad (2.10)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{(e)} = C_{ijkl}^{(e)} d\sigma_{kl}. \quad (2.11)$$

Якщо середовище однорідне і ізотропне, то рівняння (2.10) можна представити в наступному вигляді

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \frac{\sigma_0}{3K} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} s_{ij}. \quad (2.10a)$$

де K – модуль об'ємного розширення, G – модуль зсуву.

Результат деформування пружного тіла повністю визначається результатом навантаження і не залежить від виду і швидкості процесу навантаження. Так при будь-яких траєкторіях навантаження, що приводять в один і той самий напружений стан, результуюча деформація буде однаковою. Для пластичних тіл ця властивість не виконується. Пластичну поведінку деформованих середовищ можна описати, якщо визначені наступні три поняття. Перше – умова початку пластичної течії. Друге – закон течії, що зв'язує приріст пластичної деформації з напругами і їх прирощен-

нями. Третє – закон зміцнення, що встановлює зміну течії, починаючи з деякого пластичного стану.

2.2.1. Умова початку пластичної течії

Одним з основних положень теорії перебігу пружно-пластичних середовищ, що впливають з цих умов, є існування в просторі напруг шматково-гладкої поверхні, заданої рівнянням [13, 67]

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{(p)}, \chi_m, d_m) = 0, \quad (2.12)$$

яка розділяє області пружності при $f < 0$ і пластичності при $f = 0$. Дана поверхня може змінюватися від точки до точки середовища. Якщо в співвідношенні (2.12) параметри зміцнення χ_m і пластичні деформації $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ дорівнюють нулю, то це співвідношення буде залежати тільки від напруг σ_{ij} і параметрів d_m , що характеризують механічні властивості деформуючого середовища. У цьому випадку функція $f_0(\sigma_{ij}, d_m)$ називається функцією плинності, а рівняння $f_0(\sigma_{ij}, d_m) = 0$ є умовою початку пластичної течії і називається поверхнею плинності. Така модель середовища без зміцнення називається ідеальною пластичністю. Вона фіксує лише два її стани: 1) дограничний, коли середовище деформується тільки пружно і пластичні деформації не виникають; 2) граничний, коли деформація супроводжується безмежним накопиченням пластичних деформацій і середовище руйнується. В цьому випадку функція плинності і пружна область не залежать від історії навантаження елемента.

Для матеріалів, які стають міцнішими, поверхня, представлена рівнянням (2.12), може змінюватися при зміні напруженого стану. В цьому випадку вона називається поверхнею навантаження, а f – функцією навантаження. Якщо в кожній точці цієї поверхні функція навантаження диференціюється по σ_{ij} , то вона має в кожній з них єдину нормаль і називається регулярною. Для такої точки введемо три поняття: розвантаження (пасивне навантаження), нейтральне навантаження і активне навантаження.

Нехай деякий напружений стан відповідає точці навантаження, розташованої на регулярній поверхні (2.12). Від дії подальшого прирощення навантаження відбулася зміна цього стану, яке визначається однією з таких умов:

$$1) \quad df < 0; \quad d'f < 0; \quad f = 0 \text{ или } f < 0, \quad (2.13)$$

що відповідає розвантаженню, коли $\chi_m = 0, de_{ij}^{(p)} = 0$;

$$2) \quad df = 0, \quad d'f = 0, \quad f = 0, \quad (2.14)$$

що відповідає нейтральному навантаженню, коли $\chi_m = 0, de_{ks}^{(p)} = 0$;

$$3) \quad df = 0, \quad d'f = 0, \quad f = 0, \quad (2.15)$$

цей випадок відповідає процесу активного навантаження, коли $\chi_m \neq 0, de_{ks}^{(p)} \neq 0$, тобто виникають незворотні деформації.

Дані процеси навантаження показані на рис. 2.2.

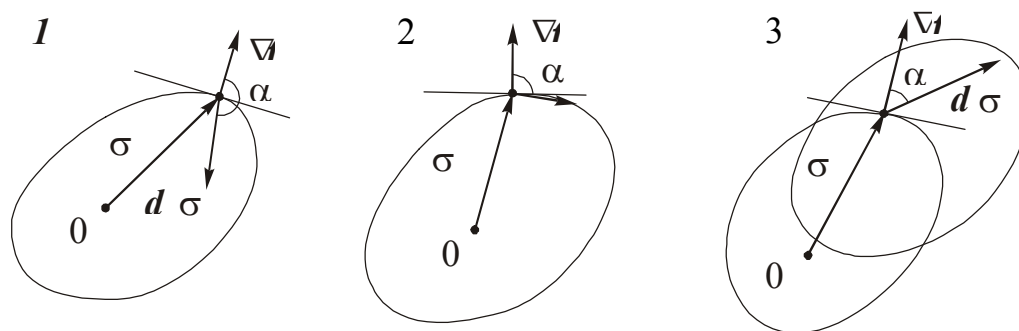


Рисунок 2.2. Процеси навантаження: 1) пасивний, 2) нейтральний, 3) активний

Отже, форма і розміри поверхні навантаження визначаються тільки пластичної частиною деформації та історією її зміни.

Поверхні навантаження можуть мати сингулярні точки. Цей випадок детально розглянуто в [67]. Показано, що такі поверхні в околиці сингулярної точки можна апроксимувати за допомогою деякого числа гладких поверхонь, що описують функціями навантаження.

2.2.2. Закон течії

Закон течії заснований на принципі максимуму Мізеса або на постулаті Друкера. [67] показано, що постулат Друкера накладає жорсткіші обмеження на властивості матеріалу, ніж принцип максимуму, який для гладкої функції навантаження можна представити у векторній формі як

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*) \cdot \dot{\mathbf{e}}^p \geq 0. \quad (2.16)$$

Тут $\boldsymbol{\sigma}$ – дійсна напруга, що відповідає значенню швидкості пластичної деформації $\dot{\mathbf{e}}^p$; $\mathbf{y}^*$ – можливий напружений стан, що допускається даною функцією навантаження $f(\boldsymbol{\sigma}_{ks}^*, \boldsymbol{\varepsilon}_{ks}^p, \chi_m, d_m) \leq 0$. Наприклад, початкові напруги в ґрунтовому масиві від дії тільки його власної ваги.

У компонентній формі (2.16) записується у вигляді

$$(\sigma_{ks} - \sigma_{ks}^*) \dot{\varepsilon}_{ks}^p \geq 0. \quad (2.17)$$

Співвідношення теорії пластичності при зроблених раніше припущеннях є однорідними щодо диференціала часу dt і при фіксованих зусиллях деформування пластичного середовища, що зміцнюється, в часі не відбувається. Тому можна (2.17) представити в припущеннях пластичної деформації як

$$(\sigma_{ks} - \sigma_{ks}^*) d\varepsilon_{ks}^p \geq 0. \quad (2.18)$$

З цих нерівностей випливає два положення : 1) поверхня навантаження для будь-якого напруженого стану $\boldsymbol{\sigma}$ не може бути увігнутою; 2) вектор прирощення пластичної деформації $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ у регулярній точці поверхні навантаження повинен бути спрямований по її зовнішній нормалі n .

Збільшення пластичних деформацій на основі принципу максимуму Мізеса записуються в околиці регулярної точки функції навантаження у вигляді

$$d\varepsilon_{ks}^{(p)} = d\lambda f_{,\sigma_{ks}}, \quad (2.19)$$

тут $d\lambda = \text{const} > 0$, $f_{,\sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$. Змінна, зазначена після коми, наступної за функцією, надалі вказує на приватне диференціювання цієї функції за даною змінною.

Постійна величина $d\lambda$ знаходиться з умови безперервної зміни поверхні навантаження, що відповідає рівнянню $df = 0$

$$d\lambda = h^{-1} d'f, \quad (2.20)$$

де h — функція зміцнення, яка визначається як

$$h = - \frac{(f_{,\varepsilon_{nm}^p} f_{,\sigma_{nm}}) f_{,\sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{f_{,\sigma_{ks}} d\sigma_{ks} + f_{,\chi_k} d\chi_k}. \quad (2.21)$$

Підставляючи (2.20) в (2.19), після перетворень знаходимо

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = C_{ijmn}^{(p)} d\sigma_{mn}, \quad (2.22)$$

де

$$C_{ijmn}^{(p)} = h^{-1} f_{,\sigma_{ij}} f_{,\sigma_{mn}} \quad (2.23)$$

Формула (2.22) застосовується тільки при активному процесі навантаження. При розвантаженні, нейтральному навантаженні і пружному деформуванні, використовується формула (2.11).

У сингулярних точках функції навантаження отримані формули асоційованого закону течії не виконуються. Потрібні додаткові умови для побудови визначального співвідношення. Найбільш поширений підхід був запропонований В. Койтером [82] у вигляді принципу суперпозиції. З цього принципу в сингулярній точці функції навантаження застосовується співвідношення

$$d\varepsilon_{ks}^p = \sum_{n=1}^N c_n d\lambda f_{,\sigma_{ks}}^{(n)}, \quad (2.24)$$

де $c_n = 1$, якщо $f^{(n)} = 0$, $d'f^{(n)} > 0$; $c_n = 0$, якщо $f^{(n)} < 0$ або $f^{(n)} = 0$, $d'f^{(n)} \leq 0$.

(2.24) відбувається підсумовування за індексом n від 1 до N , де N – кількість гладких поверхонь, що проходять через сингулярну точку.

Після вибору умови плинності і пластичної течії необхідно встановити закон зміцнення, який характеризує подальший пластичний перебіг, починаючи з деякого стану середовища. Закон зміцнення повинен враховувати різні властивості матеріалу, що проявляються при пластичному деформуванні, і бути сумісним із законом течії.

У монографії [61] на конкретних прикладах показано, що теорія пластичної течії без зміцнення для ґрунтів не підтверджується результатами експериментальних досліджень, тому не рекомендується її використовувати в розрахунках з наступних двох основних причин. 1) вона невірно прогнозує об'ємні деформації, що в деяких випадках призводить до негативних порових тисків. 2) у додатковому за міцністю стані вона враховує тільки пружні деформації і не в змозі врахувати накопичення існуючих пластичних деформацій.

2.2.3. Закони зміцнення

Серед безлічі розглянутих до цього часу законів зміцнення можна виділити два основних типи: ізотропне і анізотропне зміцнення. Спочатку розглянемо ізотропне зміцнення. У цьому випадку ґрунтове середовище повинне зберігати властивість ізотропії протягом всього процесу пластичного деформування, а функції навантаження залишаються інваріантними щодо перетворення системи координат. При активному навантаженні відбувається розширення поверхні навантаження f . Це показано на рис. 2.3.

Навантаження до точки А є пружним. Потім з цієї точки починається процес активного навантаження і кінець вектора довантаження $d\sigma$ переміститься в точку В, а поверхня навантаження f_0 розширюється до положення f_1 . Центральна точка поверхні навантаження О залишається на місці. Далі, відбулося розвантаження, і кінець вектора σ перемістився в нову точку С. При цьому, поверхня навантаження f_1 зберегла своє положення.

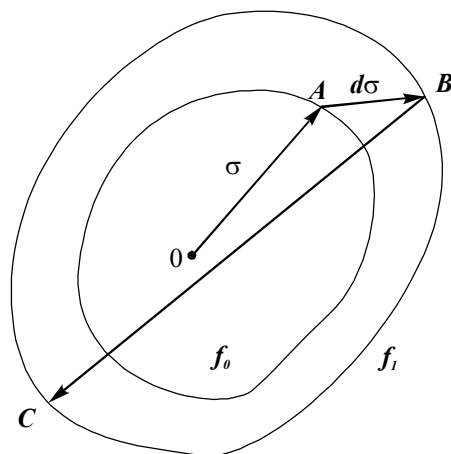


Рисунок 2.3. Ізотропне зміцнення

У [67] доведено, що модель ізотропного зміцнення належить до нестійких процесів пластичного деформування і для матеріалів, що володіють такою властивістю, не виконується основна нерівність стійкості ґрунту (2.18). Також при ізотропному зміцненні не враховується ефект анізотропії, що виникає при пластичній течії, і ефект Баушингера, який проявляється при циклічному і динамічному навантаженнях. За теорією течії з ізотропним за допомогою зміцнення одержуються задовільні результати рішення тільки при шляхах навантаження, наближених до простих.

Найпростіший варіант теорії анізотропного зміцнення – кінематичне зміцнення було запропоновано В. Прагером [123], В. В. Новожиловим і Ю. І. Кадашевичем [106]. Цей закон зміцнення встановлює, що при пластичному деформуванні поверхня навантаження переміщається в просторі напруг, як абсолютно тверде тіло, зберігаючи розміри, форму і орієнтацію первісної поверхні плинності. Він дозволяє врахувати ідеальний ефект Баушингера, що полягає в тому, що при збільшенні напруги плинності в одному напрямку деформування викликається, таке саме за величиною зменшення напруги плинності, в зворотному напрямку.

На рис. 2.4. наведено ілюстрацію кінематичного зміцнення. На ньому показаний такий самий процес деформування, що й на рис. 2.3. Тут відбулося переміщення центру поверхні плинності O в положення O_1 .

Якщо переміщення центру поверхні плинності позначити через вектор ρ (компоненти ρ_{ks}), то функцію навантаження можна представити в наступному вигляді

$$f(\sigma_{ks} - \rho_{ks}) = 0, \quad (2.25)$$

де ρ_{ks} називається також тензором залишкових мікронапруг, а

$$\sigma_{ks}^0 = \sigma_{ks} - \rho_{ks} \quad (2.26)$$

тензором активних напруг.

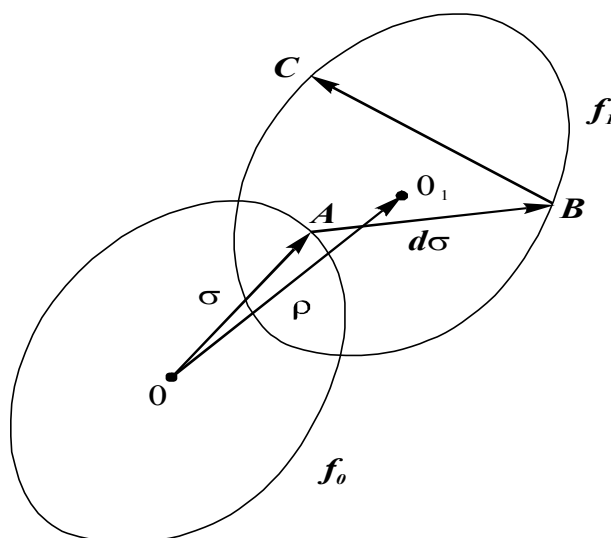


Рисунок 2.4. Кінематичне зміцнення

Тензор ρ_{ks} дорівнює нулю до моменту появи перших пластичних деформацій, залишається постійним при нейтральному навантаженні і змінюється при активному навантаженні. Його можна уявити як

$$\rho_{ks} = a_{ksnm} \epsilon_{nm}^p, \quad (2.27)$$

$$\rho_{ks} = a \epsilon_{ks}^p, \quad (2.28)$$

де a – постійна величина, яка визначається з експерименту.

У роботі [107] запропоновано приймати замість тензора a_{ksnm} функцію інваріантів ρ_{ks} . В цьому випадку поверхня навантаження не тільки переміщається в просторі напруг, але і розширюється, зберігаючи свою форму. Це дозволяє отримувати результати, які добре погоджують з експериментальними даними.

Звертаючи формули (2.11) і (2.22), отримаємо рівняння стану у вигляді:

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= D_{ijnm}^{(ep)} d\varepsilon_{nm}, \quad \text{якщо } f = 0, \quad df' > 0; \\ d\sigma_{ij} &= D_{ijnm}^{(e)} d\varepsilon_{nm}, \quad \text{якщо } f = 0, \quad df' \leq 0 \text{ або } f < 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

де $D_{ijnm}^{(ep)}$ визначено при ізотропному зміцненні як

$$D_{ijnm}^{(ep)} = D_{ijnm}^{(e)} - \frac{f_{y_{ij}} D_{ijnm}^{(e)} f_{y_{nm}} D_{ijnm}^{(e)}}{f_{y_{ij}} D_{ijnm}^{(e)} f_{y_{nm}} - \underline{f_{,u}} y_{ks} \underline{f_{,y_{ks}}}}. \quad (2.30)$$

При кінематичному зміцненні рівняння стану мають також вигляд (2.29), але в рівнянні (2.30) замість підкресленого виразу необхідно поставити $\underline{f_{,p_{nm}}} \underline{\rho_{nm}}_{, \varepsilon_{ks}^{(p)}} \underline{f_{, \sigma_{ks}}}$.

2.3. Функції навантаження

2.3.1. Умова Кулона-Мора

Розглянемо в якості функції навантаження умову Кулона-Мора, яка широко використовується для ґрунтових середовищ. У головних напругах вона має наступний вигляд

$$\sigma_1 - \chi \sigma_2 - \sigma_p = 0, \quad (2.31)$$

де $\chi = \sigma_p / \sigma_c$; σ_p , σ_c – граничний стан матеріалу при розтягуванні і стисненні.

За цієї умовою пластичний стан настає або при досягненні дотичними напругами деякої критичної величини, що залежить від нормальних напруг, які діють на тих же площинах ковзання, або при досягненні найбільшими нормальними напругами граничного значення. Гранична поверхня, відповідна умові (2.27), визначається як шестигранна рівнонахилена до осей піраміда, побудована в просторі головних напруг σ_1 , σ_2 і σ_3 . Якщо скористатися перетвореннями від σ_p , σ_c к φ , c , які наведені в [154], отримуємо:

$$\sigma_p = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \sigma_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \chi = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad (2.32)$$

де φ – кут внутрішнього тертя, c – зчеплення. Використовуючи формули (2.32), після перетворень з (2.31) отримуємо співвідношення

$$\left(\sigma_0 - \frac{\bar{\sigma} \sin \psi}{\sqrt{3}}\right) \sin \varphi + \bar{\sigma} \cos \psi - c \cos \varphi = 0, \quad (2.33)$$

яке часто використовується в механіці ґрунтів. В осях головних напруг при $c = 0$ воно зображено на рис. 2.5.

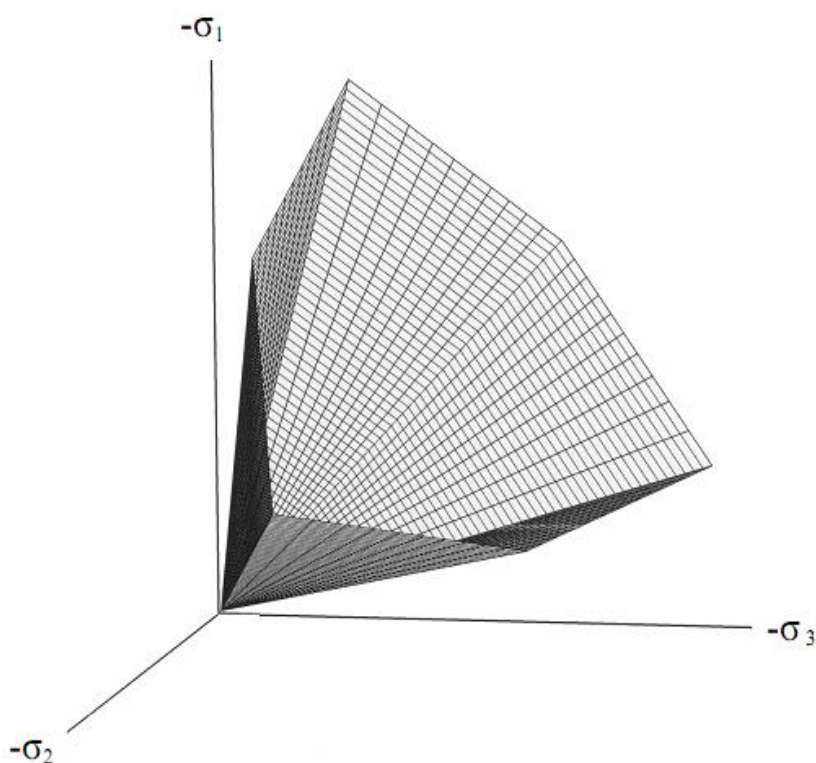


Рисунок 2.5. Графічне зображення моделі Кулона-Мора при $c = 0$

Підставляючи в (2.31) результати значень для $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, отримуємо

$$\left(\sigma_0 - \frac{\bar{\sigma} \sin \psi}{\sqrt{3}}\right)(1 - \chi) + \bar{\sigma} \cos \psi (1 + \chi) - \sigma_p = 0. \quad (2.34)$$

В даний час в загальній постановці відсутні докази існування і єдиності вирішення пружно-пластичних завдань. Деякі приватні теореми єдиності рішення і екст-

ремальні принципи в теорії пластичної течії наведені в роботах Д.Д. Івлєва, Г. І. Биковцева і В. Т. Койтера [67, 82]. Наприклад, для ідеально пластичного ґрунту розподіл швидкостей деформації не обов'язково повинен бути єдиним. Напружений стан ґрунту єдиний, якщо задана вся історія його навантаження, починаючи від природного стану і закінчуючи кінцевими значеннями діючого навантаження і переміщень, або при заданому розподілі в ґрунті пластичних деформацій.

2.3.2. Умова Боткіна

Ця умова, в основному, застосовується до ґрунтових середовищ. Вона базується на гіпотезі А. Надаї про те, що в граничному стані октаедрична дотична напруга є функцією октаедричної нормального напруги. А. Б. Боткіним в 1940 році була запропонована лінійна залежність між цими напругами, припускаючи, що граничний стан настає тоді, коли напруження зсуву досягають величини, достатньою для подолання сил тертя і зчеплення між частинками ґрунту. В інваріантній формі ця умова може бути представлена як залежність від двох інваріантів σ_o і $\bar{\sigma}$ в наступному вигляді

$$(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_o + \sqrt{3}(\sigma_c + \sigma_p)\bar{\sigma} - 2\sigma_p\sigma_c = 0. \quad (2.35)$$

У просторі головних напруг співвідношення (2.31) є рівнянням кругового конуса, вісь якого рівнонахилена до осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а координати вершини дорівнюють

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2\sigma_p\sigma_c}{3(\sigma_c - \sigma_p)}.$$

Якщо $\sigma_3 = 0$, то в системі координат $0\sigma_1\sigma_2$ при нерівності

$1 < \frac{\sigma_p}{\sigma_c} > 0,27$ гранична крива є еліпсом, при рівності $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} = 0,27$ – параболою,

при нерівності $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} < 0,27$ – гіперболою, а при рівності $\frac{\sigma_p}{\sigma_c} = 1$ – окружністю.

Характеристику міцності σ_p, σ_c можна виразити через параметри умови Кулона-Мора φ і c . Тоді (2.35) можна записати у вигляді

$$\sqrt{6}\bar{\sigma}\operatorname{ctg}\rho_{\text{окт}} - \sigma_o = 3\kappa_{\text{ок}}, \quad (2.36)$$

$$\operatorname{tg} \rho_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}(3 + \mu_{\sigma}^2) \sin \varphi}{3 + \mu_{\sigma} \sin \varphi}, \quad \operatorname{cctg} \varphi = \kappa_{\text{окт}} \operatorname{ctg} \rho_{\text{окт}}. \quad (2.37)$$

При рівності $\sigma_{\tau} = \sigma_p = \sigma_c$ из (2.31) використовується умова Мізеса

$$\sqrt{3\bar{\sigma}} = \sigma_{\tau}. \quad (2.38)$$

2.3.3. Умова Генієва

Запропоновані умови можуть бути використані стосовно бетону, кам'яних матеріалів і до гірських порід [20, 139]. Вони є узагальненням теорій граничного стану Мора і теорії найбільших нормальних напружень. Граничні поверхні в просторі головних напруг $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ апроксимуються параболоїдом обертання, вісь якого рівнонахилена до осей координат, а вершина знаходиться в точці, що відповідає граничному стану при всебічному розтягуванні. Найпростіший варіант цих умов залежить тільки від першого і другого інваріанта тензора напружень та передбачає, що граничне значення потенційної енергії формозміни є лінійною функцією першого інваріанта. Ця умова записується в наступному вигляді

$$(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_0 + 3\bar{\sigma}^2 - \sigma_p\sigma_c = 0. \quad (2.39)$$

Надалі умова (2.39) було узагальнено Г. А. Генієвим шляхом введення в нього третього інваріанта девіатора напруг. У цьому випадку модифікована умова Генієва приймає наступний вигляд

$$\begin{aligned} 3\bar{\sigma} + (\sigma_c - \sigma_p)\sigma_0 \left[1 - \left(1 - \frac{3\sigma_{\kappa}^2}{\sigma_p\sigma_c} \right) (1 - \sin \psi) \right] + \\ \sigma_p\sigma_c \left(1 - \frac{3\sigma_{\kappa}^2}{\sigma_p\sigma_c} \right) (1 - \sin 3\psi) - \sigma_p\sigma_c = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Поверхня, визначена цим рівнянням, вписана в параболоїд обертання умови (2.39) і при рівності $\sigma_k = \sqrt{\sigma_p\sigma_c/3}$ збігається з ним. У цій умові, крім двох граничних характеристик матеріалу σ_p і σ_c вводиться його третя характеристика

σ_k , яка знаходиться з дослідів на чистий зсув зразка матеріалу. Умова опуклості поверхні (2.40) виконується, якщо дотримується нерівність $0,53 < \frac{\sigma_k}{\sqrt{\sigma_p \sigma_c}} < 0,577$.

Г. А. Генієв модифікував умову (2.40) стосовно залізобетону, і вона записується так

$$(\sigma_c - \sigma_p)\sigma_0 + 3\sigma^2 + \sigma_a \{ [a_1(l_1^2 - n_1^2) + a_2(l_2^2 - n_2^2) + a_3(l_3^2 - n_3^2)]\sigma \cos \psi - [a_1(1 - 3m_1^2) + a_2(1 - 3m_2^2) + a_3(1 - 3m_3^2)]\sigma \sin \psi / \sqrt{3} \} - D = 0. \quad (2.41)$$

Тут σ_a – межа плинності арматури; μ_1, μ_2, μ_3 – коефіцієнти армування, відповідно, уздовж осей x_1, x_2, x_3 ;

$$a_1 = 2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \quad a_2 = 2\mu_2 - \mu_1 - \mu_3, \quad a_3 = 2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2; \quad -D = \sigma_p \sigma_c - (\sigma_c - \sigma_p)\sigma_a(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \sigma_a^2(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3); \quad l_k, m_k, n_k,$$

$k=1,2,3$ – косинуси напрямків осей σ_{kk} і σ_k , їх позначення відповідають наступній таблиці:

	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}
σ_1	l_1	m_1	n_1
σ_2	l_2	m_2	n_2
σ_3	l_3	m_3	n_3

Значення косинусів напрямку осей визначається з вирішення системи рівнянь:

$$(\sigma_{11} - \sigma_i)l_i + \sigma_{12}m_i + \sigma_{23}n_i = 0,$$

$$\sigma_{12}l_i + (\sigma_{22} - \sigma_i)m_i + \sigma_{23}n_i = 0,$$

$$\sigma_{13}l_i + \sigma_{23}m_i + (\sigma_{33} - \sigma_i)n_i = 0,$$

при умові $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Якщо армування в напрямку осей x_1, x_2, x_3 однакові, тобто $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, то $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $-D = -\sigma_p \sigma_c - (\sigma_c - \sigma_p) \sigma_a 3\mu$ і рівняння (2.41) збігається з (2.40), в якому необхідно замінити $\sigma_p \sigma_c$ на D .

Інші окремі випадки порівняння теоретичних результатів з дослідними даними наведені в роботі [20].

2.3.4. Умова Писаренко-Лебедєва

В залежності від граничних значень матеріалу σ_p і σ_c , цю умову можна розглядати як настання його пластичного стану або як критерій міцності. Зазвичай пластичні деформації викликаються дотичними напруженнями, які розпушують і готують матеріал до руйнування, але саморуйнування відбувається під дією нормальних розтягуючих напружень.

Умова настання граничного стану записується у вигляді наступного співвідношення

$$(\sqrt{3}\bar{\sigma})^a + \frac{\sigma_c^a - \sigma_p^a}{\sigma_c^b} \sigma_1^b - \sigma_c^a = 0. \quad (2.37)$$

При цьому розглядаються наступні три випадки:

- 1). $a = b = 1$; 2). $a = 2, b = 1$; 3). $a = b = 2$.

Розглянемо тільки перший випадок, який застосуємо до бетонів, кам'яних матеріалів і до гірських порід. В інваріантній формі він записується як

$$\frac{\sigma_c - \sigma_p}{3\sigma_c} \sigma_0 + \bar{\sigma} \left[\left(\cos\psi - \frac{\sin\psi}{\sqrt{3}} \right) \frac{\sigma_c - \sigma_p}{\sigma_c} - \frac{\sqrt{3}\sigma_p}{\sigma_c} \right] - \sigma_c = 0. \quad (2.38)$$

Різні окремі випадки, що впливають із співвідношення (2.37), розглянуті в [119]. Там також наведено їхній аналіз і зіставлення з експериментальними даними.

2.4. Висновки до розділу 2

1. Наведена система основних нелінійних рівнянь досліджуваної задачі: геометричні (2.5), (2.5 б), статичні (2.6), (2.7) і фізичні (2.29), (2.30), що залежать від властивостей функції навантаження. Вони описують напружено-деформований стан моделі від дії прикладеного статичного навантаження і застосовні для вирішення даної проблеми.

2. Показано, що функція навантаження повинна володіти певними властивостями, які сформульовані у вигляді трьох умов: початку пластичної течії, закону течії і закону зміцнення.

3. В даний час не існує єдиної функції навантаження, застосовної для різних будівельних матеріалів і ґрунтів. Тому наведені деякі види цих функцій, які експериментально обґрунтовані для певних типів деформованих середовищ.

РОЗДІЛ 3

ОПИС АЛГОРИТМУ І ВИКОРИСТОВУВАНІ ПРОГРАМНІ КОМПЛЕКСИ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

При вирішенні пружно-пластичних задач механіки деформованого твердого тіла чисельними методами необхідно реалізувати дві проблеми: 1) дискретизацію області, займаної моделлю, і дискретизацію вихідних рівнянь; 2) побудову ітераційного процесу для визначення шуканих функцій, що характеризують напружено-деформований стан моделі з наперед заданою точністю.

Вирішення першої проблеми дозволяє представити розглянуту задачу в алгебраїчній формі, тобто перейти від нескінченного числа ступенів свободи моделі до їх кінцевого числа. Її можна реалізувати, використовуючи різні проєкційні методи, наприклад, метод зважених нев'язок або метод скінчених елементів (МСЕ). Вирішення другої проблеми дає можливість найбільш просто зробити лінеаризацію вихідних нелінійних рівнянь. При цьому, операцію з коригування їх коефіцієнтів можна виконувати на кожній ітерації рішення (метод змінних параметрів пружності, метод дотичних жорсткостей) або тільки на першій ітерації, або через їхню задану кількість (модифікації методу Ньютона-Канторовича, до яких відносяться, наприклад, метод пружних рішень і метод початкових напружень). Огляди за цими методами рішення містяться в багатьох роботах, наприклад, [80, 84, 111, 113, 199].

Для дискретизації рівнянь і області тіла тут буде використовуватися МСЕ. Його переваги і недоліки детально викладені в численних роботах [73, 80, 111, 131, 140, 149, 193, 199]. Одна з основних переваг цього методу полягає в тому, що він дозволяє використовувати функції, апроксимуючі узагальнене вирішення, з областю визначення у межах кожного скінченного елемента, а також дає можливість отримувати матрицю жорсткості симетричної і стрічкової, що робить метод дуже ефективним з точки зору витрат часу розрахунку. Такою перевагою не володіють метод Бубнова-Галеркіна і варіаційні методи, які розглядаються в звичайній класичній постановці. МСЕ дозволяє також порівняно просто апроксимувати граничні умови, що викликає серйозні труднощі в звичайно-різницевих і варіаційно-різницевих методах.

До інших переваг МСЕ відносяться його простота, універсальність і ясність фізичної інтерпретації.

3.1. Дискретизація області, яку займає модель

При дискретизації області, займаної тілом при $t = 0$, використовувалися скінченні і нескінченні ізопараметричні елементи. Нескінченні елементи застосовувалися для дискретизації меж тіла, що тягнуться на великі відстані. Наприклад, межі ґрунтових масивів.

Область тіла при плоскій деформації, плоскому напруженому стані або осесиметричній деформації може апроксимуватися чотирикутниками з 4-ма, 8-ма і 9-ма вузлами. При таких деформаціях нескінченні елементи були також плоскими чотирикутниками, одна зі сторін яких простягалася в нескінченність. Вони містили 4, 5 або 6 вузлів.

При вирішенні завдань із застосуванням дискретизації шукані величини визначаються у вузлах елементів. Їхнє значення в інших точках області тіла обчислюються з використанням функцій форми, від яких залежить вид типу елементів. Застосовувані плоскі скінченні елементи показані на рис. 3.1.

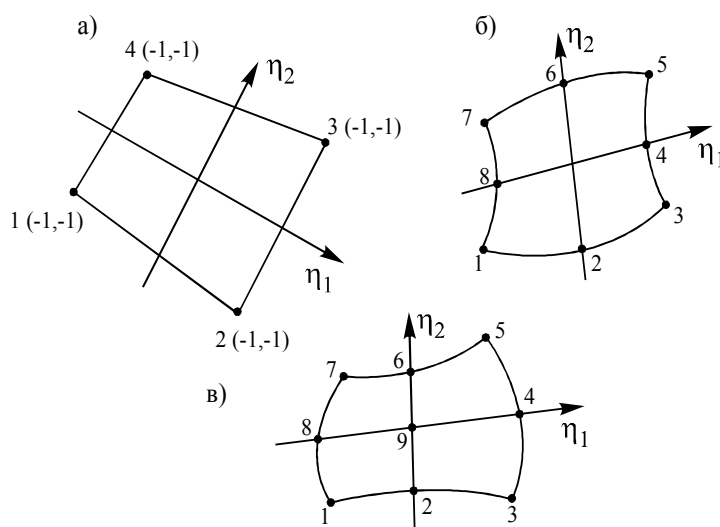


Рисунок 3.1. Плоскі скінченні елементи

Функції форми в локальній системі координат η_i , в якій виконується нерівність $-1 \leq \eta_i \leq 1$, $i = 1, 2$, для чотирьох-вузових елементів мають наступний вигляд

$$N_{(e)}^m(\eta) = \frac{1}{4} (1 + \eta_1 \eta_1^m) (1 + \eta_2 \eta_2^m), \quad (3.1)$$

де m – номери вузлів елемента $r_{(e)}$, що дорівнюють 1, 2, 3, 4.

Для восьми-вузлових скінченних плоских елементів функції форми записуються як

$$\begin{aligned} N_{(e)}^m(\eta) &= \frac{1}{4} (1 + \eta_1 \eta_1^m) (1 + \eta_2 \eta_2^m) (\eta_1 \eta_1^m + \eta_2 \eta_2^m - 1), \quad m = 1, 3, 5, 7; \\ N_{(e)}^m(\eta) &= \frac{1}{2} (\eta_1^m)^2 (1 + \eta_1 \eta_1^m) (1 - \eta_2^2) - \frac{1}{2} (\eta_2^m)^2 (1 + \eta_2 \eta_2^m) \\ &\cdot (1 - \eta_1^2), \quad m = 2, 4, 6, 8. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для дев'яти-вузлових скінченних плоских елементів функції форми приймають вигляд:

$$\begin{aligned} N_{(e)}^m(z) &= \frac{1}{4} (z_1^2 + z_1 z_1^m) (z_2^2 - z_2 z_2^m), \quad m = 1, 3, 5, 7; \\ N_{(e)}^m(z) &= \frac{1}{2} (z_2^m)^2 (z_2^2 - z_2^m) (1 - z_1^2) + \frac{1}{2} (z_1^m)^2 (z_1^2 - z_1 z_1^m) \\ &\cdot (1 - z_2^2), \quad m = 2, 4, 6, 8; \\ N_{(e)}^m(z) &= (1 + z_1^2) (1 - z_2^2), \quad m = 9. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Кожній сукупності локальних координат η_i , $i = 1, 2$ у співвідношеннях (3.1) – (3.3) зіставляється одна і тільки одна сукупність глобальних координат його вузлів за формулою

$$x_{\kappa(e)} = x_{\kappa(e)}^m N_{(e)}^m(\eta), \quad \kappa = 1, 2; \quad m = 1, 2, \dots, m_e, \quad (3.4)$$

де $x_{\kappa(e)}$ – глобальні координати вузлів елемента $r_{(e)}$.

Нескінченні плоскі елементи з 4-ма, 5-ма і 6-ма вузлами показані на рис. 3.2.

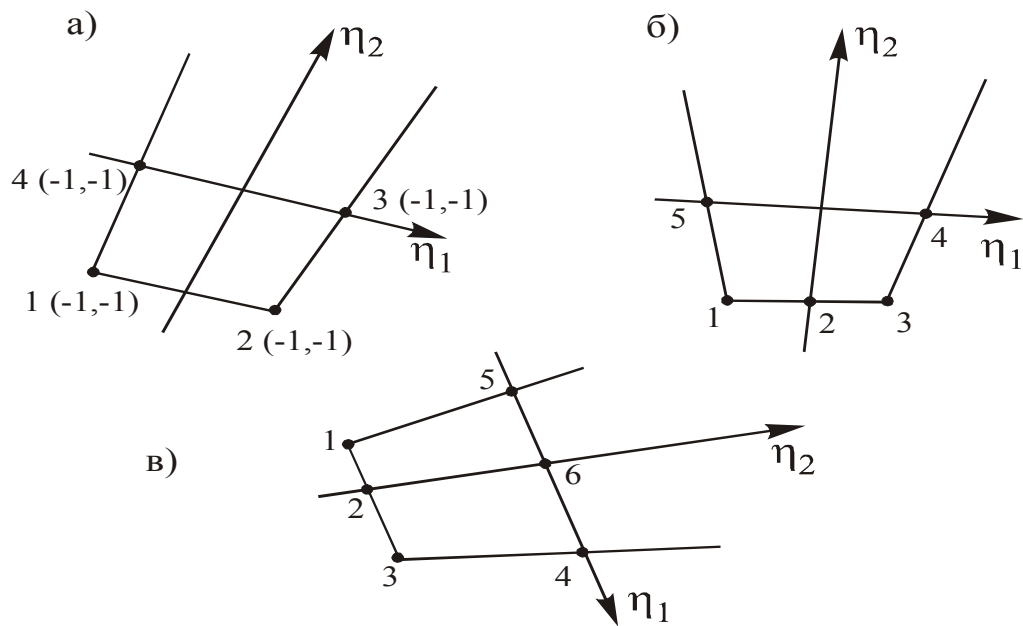


Рисунок 3.2. Плоскі нескінченні елементи

Для чотирьох-вузлових плоских нескінченних елементів функції форми мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 N_{(e)}^1(z) &= -\frac{z_2(l - z_1)}{l - z_2}, & N_{(e)}^2(z) &= -\frac{z_2(l + z_1)}{l - z_2}, \\
 N_{(e)}^3(z) &= -\frac{(l + z_1)(l + z_2)}{2(l - z_2)}, & N_{(e)}^4(z) &= -\frac{(l - z_1)(l + z_2)}{2(l - z_1)}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Для п'яти-вузлових плоских нескінченних елементів функції форми можна записати як:

$$\begin{aligned}
 N_{(e)}^1(z) &= \frac{l - z_1}{l - z_2} [(l - z_1) + (l - z_2) - 3], \\
 N_{(e)}^2(z) &= \frac{l - z_1}{l - z_2} (l + z_1) \cdot 2, \\
 N_{(e)}^3(z) &= \frac{l + z_1}{l - z_2} [(l + z_1) + (l - z_2) - 3], \\
 N_{(e)}^4(z) &= \frac{l + z_1}{l - z_2} (l + z_2) \cdot \frac{l}{2}, \\
 N_{(e)}^5(z) &= \frac{l - z_1}{l - z_2} (l + z_2) \cdot \frac{l}{2},
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для шести-вузлових плоских нескінченних елементів функції форми можна уявити як:

$$\begin{aligned} N_{(e)}^1(\eta) &= \left(-\frac{I}{2} + \eta_l\right) \frac{-2\eta_2}{I + \eta_2}, & N_{(e)}^2(\eta) &= (I - \eta_l) \frac{-2\eta_2}{I - \eta_2}, \\ N_{(e)}^3(\eta) &= \left(\frac{I}{2} + \eta_l\right) \frac{-2\eta_2}{I - \eta_2}, & N_{(e)}^4(\eta) &= (I + \eta_l) \left(I - \frac{2\eta_2}{I - \eta_2}\right), \\ N_{(e)}^5(\eta) &= -2\eta_l \left(I - \frac{2\eta_2}{I - \eta_2}\right), & N_{(e)}^6(\eta) &= \left(-\frac{I}{2} + \eta_l\right) \frac{2}{(I - \eta_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

У цих елементах функції форми обрані таким чином, щоб вони приймали нескінченні значення тільки в деяких напрямках. Так, в точках, де $\eta_2 = I$ отримуємо значення функції форми рівні нескінченності. Відбувається відображення нескінченної області в глобальних координатах $0x_1x_2$ в кінцеву область $-I \leq \eta_l \leq I$, $-I \leq \eta_2 \leq I$ в локальних координатах $0\eta_1\eta_2$. Тому в цих координатах нескінченні елементи займають кінцеву область, тільки функції форми в деяких вузлах цієї області приймають нескінченні значення. У такому розумінні відмінності в назвах між скінченні і нескінченними елементами немає. Тому їх в деяких роботах в обох випадках називають скінченими.

В області, яку необхідно представити у вигляді певної кількості пов'язаних кінцевих елементів, фіксуємо деяке кінцеве число точок, рівне M . Їх позначаємо як $\mathbf{x}^\Delta$ ($\Delta=1, 2, \dots, M$) і називаємо глобальними вузлами. Потім, по цих вузлах будуємо скінченні елементи, кількість яких дорівнюватиме M_e . У кожен елемент входить m_e глобальних вузлів, які позначимо як $\mathbf{x}_{(e)}^\kappa$, $\kappa = 1, 2, \dots, m_e$ і називаємо локальними вузлами елемента.

Вводимо відображення

$$\mathbf{x}^\Delta = \prod_{\Delta}^{\kappa} \mathbf{x}_{(e)}^\kappa, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e, \quad (3.8)$$

яке вкладає деякий скінченний елемент в область, займану тілом. При цьому, $\Lambda_{\Delta}^{(e)\kappa} = 1$, якщо глобальний вузол тіла збігається з локальним вузлом κ елемента

$r_{(e)}$, і $\Lambda_{\Delta}^{(e)\kappa} = 0$ в протилежному випадку. Сукупність відображень $\Lambda = \left\{ \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{M_e} \right\}$

пов'язує M_e елементів в дискретну модель тіла, яку позначаємо через $\overset{\circ}{V}_e$. Необхідною і достатньою умовою існування сукупності відображень $\Lambda_{\Delta}^{(e)m}$, які забезпечують можливість підганяти елементи один до одного таким чином, щоб вони утворили область $\overset{\circ}{V}_e$, є умова сумісності, наведена в роботах [111, 140].

Зворотна сукупність відображень $\Omega = \left\{ \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots, \Omega^{M_e} \right\}$ здійснює розбиття області

ті $\overset{\circ}{V}_e$ на скінченні елементи. Для елемента $r_{(e)}$

$$\mathbf{x} = \Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} \mathbf{x}^{\Delta}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e, \quad (3.9)$$

де $\Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} = 1$, якщо вузол κ елемента $r_{(e)}$ збігається з вузлом Δ області $\overset{\circ}{V}_e$ і $\Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} = 0$ – в іншому випадку.

Вектор-функцію прирощення переміщення $du(\mathbf{x})$ в глобальному вузлі $\mathbf{x}^{\Delta}$ позначимо через $du^{\Delta} = du(\mathbf{x}^{\Delta})$. Величину du^{Δ} називаємо глобальними значеннями $du(\mathbf{x})$ у вузлах області $\overset{\circ}{V}_e$.

Кожен скінченний елемент $r_{(e)}$ вважається областю визначення деякої локальної вектор-функції $du_{(e)}$ того самого класу, що й du . Значення $du_{(e)}$ в локальному вузлі $\mathbf{x}_{(e)}^{\kappa}$ елемента $r_{(e)}$ позначаємо через $d\mathbf{d}_{(e)}^{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \dots, m_e$ і називаємо локальним значенням функції $du_{(e)}$ в елементі $r_{(e)}$.

3.2. Дискретизація вихідних рівнянь

Апроксимуємо $du_{(e)}$ на елементі $r_{(e)}$ безперервними функціями, лінійно залежними від $d\theta_{(e)}^\kappa$, у вигляді

$$du_{(e)} = N_{(e)}^\kappa d\theta_{(e)}^\kappa, \quad du_{(e)} = (du_1, du_2)^T, \quad (3.10)$$

де функції форми N_e у вузлах елемента $x_{(e)}^\kappa$ задовольняють умову

$$N_{(e)}^n(x_{(e)}^\kappa) = \delta_{kn}, \quad n, \kappa = 1, 2, \dots, m_e. \quad (3.11)$$

де δ_{kn} – символ Кронекера.

Скінченна елементна модель вектор-функції $du(x)$ визначається шляхом зв'язування всіх вузлів скінчених елементів співвідношеннями (3.8), що відображають безліч локальних значень $d\theta_{(e)}^\kappa$ в множину глобальних значень $d\theta^\Delta$

$$d\theta^\Delta = \Lambda_{\Delta}^{(e)\kappa} d\theta_{(e)}^\kappa, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e. \quad (3.12)$$

Зворотну процедуру здійснює відображення

$$d\theta_{(e)}^\kappa = \Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} d\theta^\Delta, \quad \Delta = 1, 2, \dots, M. \quad (3.13)$$

Дискретна модель вектор-функції $du(x)$ визначається у вигляді співвідношення

$$du(x) = \sum_{e=1}^{M_e} du_{(e)} = \sum_{e=1}^{M_e} N_{(e)}^\kappa \Omega_{\Delta}^{(e)\kappa} d\theta^\Delta = N^\Delta d\theta^\Delta, \quad (3.14)$$

де після другого знака рівності проводиться підсумовування по Δ от 1 до M .

$$N^{\Delta} = \sum_{e=1}^{M_e} N_{(e)}^{\kappa} \Omega_{\Delta}^{\kappa(e)}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e.$$

Позначимо через ∂^{Δ} , $\Delta = 1, 2, \dots, M$ глобальне значення $\mathbf{u}$ у вузлі Δ . В цьому випадку отримуємо

$$\mathbf{u} = N^{\Delta} \partial^{\Delta}. \quad (3.15)$$

Так само знаходимо

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}^{\Delta} \partial^{\Delta}, \quad d\mathbf{e} = \mathbf{B}^{\Delta} d\partial^{\Delta}, \quad (3.16)$$

де матриця $\mathbf{B}^{\Delta}$ для плоских задач має вигляд:

$$\mathbf{B}^{\Delta} = \begin{bmatrix} N_{,x_1}^{\Delta} & 0 \\ 0 & N_{,x_2}^{\Delta} \\ N_{,x_2}^{\Delta} & N_{,x_1}^{\Delta} \end{bmatrix}, \quad N_{,x_{\kappa}}^{\Delta} = \frac{\partial N^{\Delta}}{\partial x_{\kappa}}; \quad (3.17)$$

$$\mathbf{e} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}]^T, \quad d\mathbf{e} = [de_{11}, de_{22}, de_{12}]^T, \quad (3.18)$$

$$\asymp \mathbf{D} \mathbf{e}, \quad \sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T.$$

Тут $\mathbf{D}$, наприклад, для плоскої пружної деформації приймає вигляд:

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{(1-\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Для пружно-пластичної області тіла $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{ep}$.

При вирішенні даної задачі можна використовувати рівняння віртуальної роботи, яке в повних напругах при статичних навантаженнях можна записати в матричній формі як:

$$[\mathbf{d}\partial^\Delta]^\tau \left\{ \int_{\overset{\circ}{V}} [B^\Delta]^\tau \sigma d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} [N^\Delta]^\tau \overset{\circ}{F} d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{S}_1} [N^\Delta]^\tau \mathbf{q} d\overset{\circ}{S} \right\} = 0. \quad (3.20)$$

Нагадаємо, що в співвідношеннях (3.15), (3.16) і (3.20) виконується підсумовування за індексом Δ від I до M .

Перший доданок в фігурних дужках (3.20) стосовно до кінцевого елементу $r_{(e)}$ перетворюється у вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{(e)}^{\kappa s} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{(e)}^\kappa]^\tau D_{(e)} B_{(e)}^s \mathbf{h}_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 = \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sigma_{(e)}^{\kappa s} d\eta_1 d\eta_2, \quad \kappa, s = 1, 2, \dots, m_e. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Другий доданок в (3.20), відповідно, приймає наступний вигляд

$$F_{(e)}^\kappa = \int_{-l}^l \int_{-l}^l [N_{(e)}^\kappa]^\tau \overset{\circ}{F}_{(e)} h_{(e)} \det \mathbf{J}_{(e)} d\eta_1 d\eta_2 = \int_{-l}^l \int_{-l}^l f_{(e)}^\kappa d\eta_1 d\eta_2, \quad \kappa = 1, 2, \dots, m_e. \quad (3.22)$$

Зазвичай в якості в розрахунках приймається власна вага тіла. У цьому випадку (3.22) можна записати як

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}_{x_1(e)}^\kappa &= \int_{-l}^l \int_{-l}^l [N_{(e)}^\kappa]^m c_{(e)} \mathbf{g} \sin I \det \mathbf{J}_{(e)} dz_1 dz_2, \\ \overset{\circ}{F}_{x_2(e)}^\kappa &= - \int_{-l}^l \int_{-l}^l [N_{(e)}^\kappa]^m c_{(e)} \mathbf{g} \cos I \det \mathbf{J}_{(e)} dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де $\rho_{(e)}$ – щільність маси матеріалу елемента; $\mathbf{g}$ – прискорення сили тяжіння; Θ – кут між віссю x_l і напрямком гравітаційної сили.

Якщо скінченний елемент в процесі деформування тіла переходить в пружно-пластичний стан, то матриця $\mathbf{D}_{(e)}$ замінюється на $\mathbf{D}^{ep}$. При переході скінченного елемента до пружно-в'язко-пластичного стану проводиться також заміна $\mathbf{D}_{(e)}$ на $\mathbf{D}^{vp}$. В пружному стані ця матриця дорівнює $\mathbf{D}^e$.

Точне обчислення складних інтегралів (3.21) і (3.22) вдається виконати дуже рідко, тому ці операції виробляються чисельними методами зазвичай за Гаусом [199]

$$\sigma_{(e)}^{\kappa s} = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_{(e)}^{\kappa s}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) H_m H_l, \quad (3.24)$$

$$F_{(e)}^{\kappa} = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n f_{(e)}^{\kappa}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) H_m H_l,$$

де η_1, η_2 – координати точок інтегрування, їх кількість на елементі $r_{(e)}$ дорівнює n ; H_m, H_l – ваговий коефіцієнт. Ці значення беруться з таблиць [199].

Формули чисельного інтегрування (3.23) матимуть такий вигляд.

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}_{x_1(e)} &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n c_{(e)} \mathbf{g} h_{(e)} \sin IN_{(e)}^{\kappa}(\bar{z}_1^m, \bar{z}_2^m) \det \mathbf{J} H_m H_l, \\ \overset{\circ}{F}_{x_2(e)} &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n c_{(e)} \mathbf{g} h_{(e)} \cos IN_{(e)}^{\kappa}(\bar{z}_1^m, \bar{z}_2^m) \det \mathbf{J} H_m H_l. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Розглянемо третє доданок у фігурних дужках (3.20), яке містить поверхневі зусилля $\overset{\circ}{\mathbf{q}} = [q_n, q_t]^T$. Тут q_n – нормальна складова до поверхні $\overset{\circ}{S}_l$ зусилля $\overset{\circ}{\mathbf{q}}$, а $\mathbf{q}_t$ – його дотична складова. Вони визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{q}_{x_1(e)}^\kappa &= \int_{S_{1(e)}^\circ} N_{(e)}^\kappa (q_t x_{1,3_1} - q_n x_{2,3_2}) dz_1, \\ \overset{\circ}{q}_{x_2(e)}^\kappa &= \int_{S_{1(e)}^\circ} N_{(e)}^\kappa (q_n x_{1,3_1} + q_t x_{2,3_2}) dz_1.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Ці складові зусилля показані на рис. 3.3.

З (3.25) випливає, що в процесі деформування вираз, що стоїть у фігурних дужках дорівнює нулю, так як можливі вузлові переміщення $d\mathbf{d}^\Delta$ приймаються відмінними від нуля. При чисельному наближеному рішенні і при обчисленнях на ЕОМ з певною точністю рівності нулю цього виразу не виходить, тобто

$$\omega = \int_{\overset{\circ}{V}} [B^\Delta]^\tau \sigma d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} [N^\Delta]^\tau \overset{\circ}{F} d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{S}_1} [N^\Delta]^\tau \overset{\circ}{q} d\overset{\circ}{S} \neq 0, \quad (3.27)$$

де ω — вектор остаточної (ресидуальної) сили.

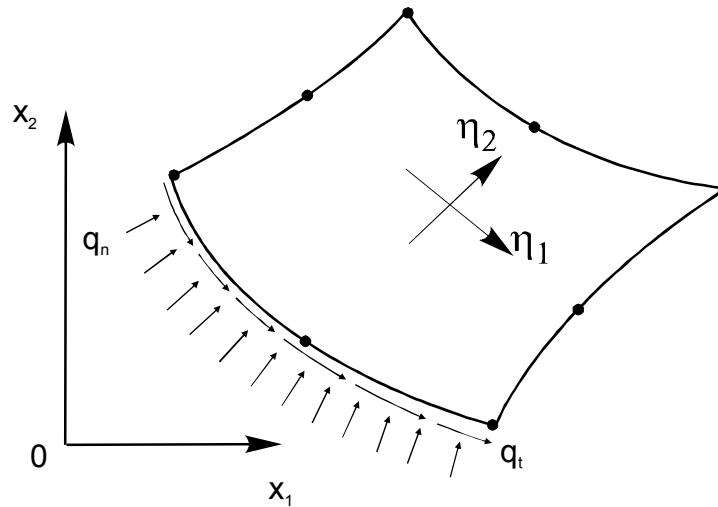


Рисунок 3.3. Нормальні і дотичні складові поверхневого зусилля, діючого на граничний скінченний елемент

Якщо завдання вирішується в припошеннях, то на кожному кроці припошення також виникає залишкова сила, що дорівнює

$$\Delta u_i = \int_{\overset{\circ}{V}} [B^\Delta]^\tau \Delta \sigma d \overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} [N^\Delta]^\tau \Delta \overset{\circ}{F} d \overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{S}_1} [N^\Delta]^\tau \Delta \overset{\circ}{q} d \overset{\circ}{S} \neq 0. \quad (3.28)$$

Тому в процесі чисельного вирішення завдань передбачається процедура для зменшення ω до наперед заданої малої величини.

3.3. Алгоритм вирішення

При наближеному методі вирішення завдання внаслідок накопичення різноманітних помилок можливий вихід вектора напруг σ за межі поверхні, визначеної функцією навантаження, тобто $f > 0$. Така ситуація неприпустима в теорії пластичного перебігу. В процесі вирішення передбачена процедура повернення вектора на поверхню навантаження або всередину області, обмеженої цією поверхнею. Вона виконується за наступним алгоритмом.

1. Визначається на i -тій ітерації вектор збільшення вузлових переміщень $d\delta^i$, далі за формулою (3.15) знаходиться вектор du^i та за формулою (3.16) вектор de^i від дії остаточної сили ω^{i-1} , отриманої на $i - 1$ ітерації.

2. Обраховуються

$$d\sigma^{ei} = Dde^i, \quad \sigma^i = \sigma^{i-1} + d\sigma^{ei}. \quad (3.29)$$

3. Робиться перевірка: чи виходить вектор σ^{ei} за область, обмежену поверхнею навантаження. Позначимо цю область через G , а її межу – через ∂G . Можливі два випадки:

А) до i -ої ітерації кінець вектора σ^{i-1} перебував на поверхні ∂G ;

В) до i -ої ітерації кінець вектора σ^{i-1} перебував всередині області G . Досліджуємо випадок А. Тут можливі три варіанти:

1) виконується процес розвантаження, отже, ніякого коригування напруг σ^{ei} робити не треба;

2) виконується процес нейтрального навантаження, отже, і тут також не треба коригувати вектор напруг σ^{ei} ;

3) функція навантаження $f > 0$ і кінець вектора напруг σ^{ei} виходить за область $G \cup \partial G$. Така ситуація зображена на рис. 3.4. Потрібно коригування вектора σ^{ei} .

Із точки В проводимо нормаль n до поверхні навантаження ∂G , на якій лежить вектор прирощень пластичної деформації de^{i-1} . На підставі постулату підсумовування деформації визначаємо

$$de^{i-1} = de^{e,i-1} + de^{p,i-1} = (D^e)^{-1} d\sigma^{i-1} + de^{p,i-1}, \quad (3.30)$$

де D^e – матриця модулів пружності.

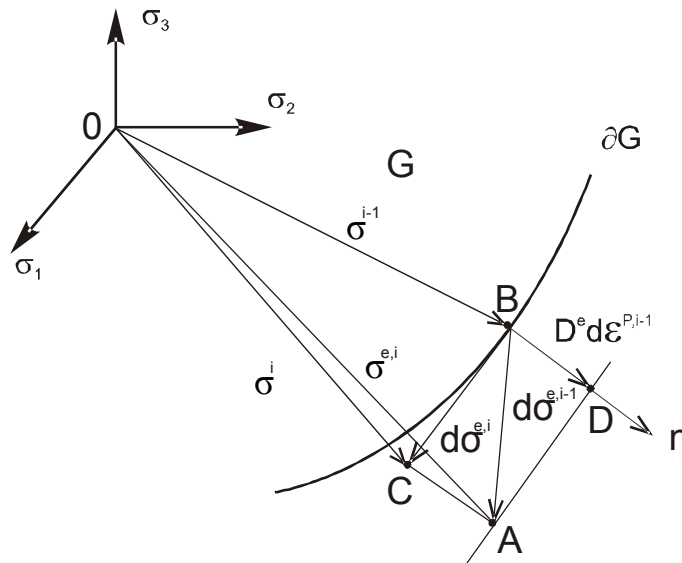


Рисунок 3.4. Повернення вектора σ^{ei} при умовах: $f > 0$, кінець вектора σ^{i-1} лежить на поверхні ∂G

Множачи ліву і праву частини співвідношення (3.30) на D^e , одержуємо

$$D^e de^{i-1} = d\sigma^{i-1} + D^e de^{p,i-1}. \quad (3.31)$$

Отже, для перетворення вектора напруг $\sigma^{e,i}$ в вектор σ^i необхідно визначити $D^e d\epsilon^{p,i-1}$ и відняти цей вираз із $\sigma^{e,i}$. При чисельній реалізації на ЕОМ всі ці операції виконуються в компонентній формі.

Досліджуємо випадок В. на i -ій ітерації можливі два варіанти:

1) функція навантаження $f > 0$ і кінець вектора напруг $\sigma^{e,i}$ знаходиться всередині області, що відповідає пружному стану матеріалу. Корекція вектора не проводиться.

2) функція навантаження $f > 0$ і кінець вектора напруг $\sigma^{e,i}$ виходить за область $G \cup \partial G$. Ця ситуація зображена на рис. 3.5.

В цьому випадку, тільки частина вектора збільшення пружних напруг $d\sigma^{e,i-1}$ виходить за межі області $G \cup \partial G$. Це вектор $\overrightarrow{BA}$, він і становить частину вектора $\overrightarrow{EA}$, котра дорівнює $R d\sigma^{e,i-1}$, де $R = BA / EA$. Інша частина вектора $d\sigma^{e,i-1}$ знаходиться в пружній області і дорівнює $(1 - R) d\sigma^{e,i-1}$.

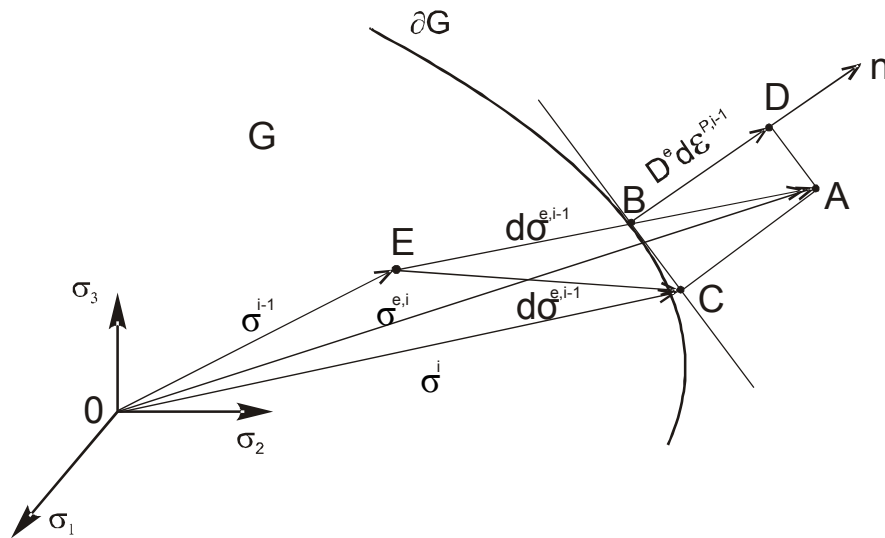


Рисунок 3.5. Повернення вектора σ^i при умовах: $f > 0$, кінець вектора σ^{i-1} лежить всередині G

Таким чином, вектор $\sigma^{e,i-1}$ повністю лежить в пружній області, якщо він дорівнює сумі векторів σ^{i-1} и $(1-\mathbf{R})d\sigma^{e,i-1}$.

Аналогічно попередньому випадку, знаходимо

$$d\sigma^{e,i-1} = D^e de^{i-1} - D^e de^{p,i-1}. \quad (3.32)$$

З рис. 3.5 випливає, що для перетворення вектора напруг $\sigma^{e,i}$ у вектор σ^i , який задовольнятиме умову $f = 0$, необхідно визначити на i -ій ітерації вектор $D^e de^{p,i-1}$ і відняти його з вектора $\sigma^{e,i}$, тобто

$$\sigma^i = \sigma^{e,i} - D^e de^{p,i-1}. \quad (3.33)$$

Наведений вище аналіз показує для випадку А (варіанти 1 і 2) і для випадку В (варіант 1) коригування вектора $d\sigma^{e,i-1}$ на i -ій ітерації виробляти не потрібно. Напруги повинні визначатися за формулою

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} - d\sigma^{e,i-1}. \quad (3.34)$$

Для випадку А (варіант 3) і для випадку В (варіант 2) необхідне коригування $d\sigma^{e,i-1}$. Напруга σ^i має визначатися за формулою (3.32). При коригуванні вектора $d\sigma^{e,i-1}$ формула (3.33), яка визначає вектор напруг σ^i , перетворюється у вигляд

$$\sigma^i = \kappa^{i-1} + d\sigma^{e,i-1} - D^e de^{p,i-1}. \quad (3.35)$$

4. Залежно від наведених вище умов, необхідно визначати σ^i за формулою (3.34) або (3.35). Знайдене значення σ^i використовується для обчислення вектора залишкової сили ω .

Слід нагадати, що в теорії в'язко-пластичного перебігу умова $f > 0$ допускається.

Застосовуючи відображення Λ до (3.28), (3.29) або (3.31) і позначаючи через $\mathbf{Q}$ об'єднання підматриць масових і поверхневих сил в глобальну матрицю вузлових навантажень, отримуємо наступне рівняння

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\vartheta})\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{Q} = 0. \quad (3.36)$$

Воно є аналогом вираження в фігурних дужках (3.20), прирівняного до нуля. В (3.36) називається матрицею жорсткості системи, яка залежить через матрицю $\mathbf{D}$ від вектора глобальних вузлових переміщень.

Як вже зазначалося вище, чисельне рішення розглянутих пружно-пластичних або пружно-в'язко-пластичних завдань знаходиться в припущеннях. Для цього діюче навантаження $\mathbf{Q}$ розбивається на N малих інтервалів $\Delta\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ і потім визначається вектор вузлових збільшень переміщень $\Delta\boldsymbol{\vartheta}_i$ із рівняння

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\vartheta}_i)\Delta\boldsymbol{\vartheta}_i - \Delta\mathbf{Q}_i = 0. \quad (3.37)$$

Далі за наведеними вище формулами знаходиться $\Delta\mathbf{e}_i$ і $\Delta\sigma_i$.

Розберемо процес рішення докладніше. На першому наближенні від діючого навантаження $\Delta\mathbf{Q}_1$ із вирішення рівняння (3.37) отримані $\boldsymbol{\vartheta}_1 = \Delta\boldsymbol{\vartheta}_1$, $\mathbf{e}_1 = \Delta\mathbf{e}_1$, $\sigma_1 = \Delta\sigma_1$. Відповідно, після i -го наближення визначені: $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i-1} + \Delta\mathbf{Q}_{i-1}$, $\boldsymbol{\vartheta}_i = \boldsymbol{\vartheta}_{i-1} + \Delta\boldsymbol{\vartheta}_{i-1}$, $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1} + \Delta\mathbf{e}_{i-1}$, $\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_{i-1}$. Внаслідок наближеного рішення рівняння (3.37) і наближених обчислень утворилася нев'язка у вигляді залишкової сили

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\vartheta}_{i-1})\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{i-1} - \Delta\mathbf{Q}_{i-1} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\vartheta}_{i-1}). \quad (3.38)$$

Отже, вона також фігурує і в рівнянні (3.36)

$$u(\partial_{i-1}) = K(\partial_{i-1})\partial_{i-1} - Q_{i-1}. \quad (3.39)$$

Підставляючи (3.38) в (3.39), після перетворень знаходимо співвідношення

$$K(\partial_{i-1})\partial_i - Q_i = 0 \quad (= u(\partial_{i-1})), \quad (3.40)$$

в якому також внаслідок наближених обчислень в правій частині замість нуля отримуємо нев'язку $u(\partial_{i-1})$.

Бачимо, що на кожному кроці наближення в рівнянні рівноваги (3.36) внаслідок наближеного розв'язку (3.37) і наближених обчислень утворюється нев'язка, яка також пов'язана з поверненням вектора напруг всередину або на межу області, обмежену поверхнею навантаження. Тому в процесі чисельного рішення розроблена процедура щодо зменшення нев'язки до наперед заданої малої величини.

Наступна складність полягає у вирішенні рівняння (3.37) на кожному етапі збільшення навантаження ΔQ_i . Різні однокрокові та багатокрокові методи вирішення таких рівнянь викладені в [111]. Рівняння (3.37), опускаючи індекс i , можна записати як

$$K(\partial)\Delta\partial = 0. \quad (3.41)$$

Ітераційний процес вирішення рівняння (3.41) за методом Ньютона-Канторовича можна представити наступним чином

$$\Delta\partial^j = \Delta\partial^{j-1} - [K(\partial^{j-1})]^{-1} K(\partial^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

Складність розв'язання рівняння (3.42) полягає у визначенні виробничої матриці жорсткості системи алгебраїчних рівнянь і потім в її зверненні. Швидкість збі-

жності залежить від вдалого вибору початкового наближення. Для спрощення рішення застосовуються різні модифікації ітераційного процесу (3.42) [73, 193]. Нами в програмний комплекс закладений метод дотичних жорсткостей і його модифікації, коли матриця жорсткості при її зверненні обчислюється через задану кількість ітерацій. Лінійна система алгебраїчних рівнянь на кожній ітерації вирішується фронтальним методом [50, 120, 186]. Ітераційний процес закінчується, якщо виконується нерівність

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{\vartheta}^j - \Delta \boldsymbol{\vartheta}^{j-1}\|}{\|\boldsymbol{\vartheta}^j\|} \leq \varepsilon_0, \quad (3.43)$$

де ε_0 – наперед задана мала величина.

Алгоритм вирішення орієнтований на використання ЕОМ і включає наступні етапи, відповідні блок-схеми програми.

1. Оголошуються глобальні динамічні масиви. Потім вводяться з перевіркою вихідні дані.
2. Проводиться автоматизоване за допомогою ЕОМ розбиття області, займаної системою, на скінченні елементи. Далі, визначаються межі динамічних масивів і оголошуються необхідні файли.
3. Проводиться розбиття діючого навантаження і заданих переміщень в області системи на припущення. Виводиться на дисплей схема скінчених елементів із зазначенням нумерації їх вузлів і елементів. Організовується цикл щодо цих припущень.
4. Будується ітераційний процес, який включає в себе операції для зменшення нев'язки в рівнянні рівноваги системи і для повернення вектора напруг в область, обмежену функцією навантаження. На кожній ітерації виконуються наступні операції:
 - а. Визначається кількість ітерацій, через яку коригується матриця жорсткості. Якщо це потрібно на даній ітерації, то заново обчислюються елементи матриці жор-

сткості. Для цього спочатку визначається допоміжні матриці B і D . До обчислення елементів матриці D робиться перевірка скінченних елементів щодо їхньої можливої роботи в пружно-пластичній стадії. Якщо це підтверджується, то замість матриці D визначається матриця D^{ep} . В іншому випадку обчислюється матриця D^e . Проводиться запис елементів матриці $K(\partial)$ у допоміжний файл.

б) З допоміжного файлу вводяться по сегментах елементи матриці жорсткості і виконується рішення фронтальним методом. Визначаються $\Delta\partial$ і ∂ .

в) Обчислюється нев'язка, викликана наближеним рішенням і поверненням вектора напруг в область, обмежену функцією навантаження. Коригується вектор напруг з урахуванням перерозподілу пластичних зон в тілі.

г) Робиться перевірка нерівності (3.43). Якщо вона не виконується, то процес рішення повертається на пункт а.

1. Закінчується цикл щодо прирощення навантаження і заданого переміщення.

2. Проводиться вивід на дисплей загальної схеми переміщення тіла, схеми утворення пластичних зон, а також епюр переміщень і напружень по перетинах, що цікавлять користувача.

Даний алгоритм був реалізований для ЕОМ в системі СІ # і показав високу ефективність при вирішенні пружно-пластичних завдань.

Розглянемо вирішення пружно-в'язко-пластичних завдань. В момент часу t_n рівняння віртуальної роботи після дискретизації матиме вигляд (3.37). При вирішенні завдання в прирощеннях воно записується в такій самій формі, але повні напруги і навантаження замінюються їхніми прирощеннями. Наприклад, враховуючи, що $[d\partial]^T \neq 0$, отримуємо

$$\int_{\dot{V}} [B_n^\Delta]^T \Delta\sigma_n d\dot{V} - \int_{\dot{V}} [N_n^\Delta]^T \Delta F_n d\dot{V} - \int_{s_1} [N_n^\Delta]^T \Delta q_n d\dot{S} = 0, \quad (3.44)$$

де індекс n вказує, що рівняння (3.44) записано для моменту часу t_n .

Враховуючи, що в рівнянні (3.44) $\Delta \mathbf{e}_n = \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\theta}_n$, після його перетворень отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \boldsymbol{\theta}_n &= [\mathbf{K}_n]^{-1} d \mathbf{W}_n, \\ d \mathbf{W}_n &= \int_{\dot{V}} [\mathbf{B}_n]^m \mathbf{D}_n^{vp} \mathbf{e}_n^{vp} \mathcal{D} t_n d \dot{V} - \mathcal{D} \mathbf{Q}_n. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Прирошення в'язко-пластичних деформацій визначається як

$$\Delta \mathbf{e}_n^{vp} = \mathbf{B}_n \Delta \boldsymbol{\delta}_n - [\mathbf{D}_n^{vp}]^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_n. \quad (3.46)$$

Для пружно-в'язко-пластичних завдань допускається $f > 0$, тому нев'язка в рівнянні рівноваги в момент часу t_n буде викликана похибками обчислень і похибками наближеного методу розв'язання задачі, тобто

$$\mathcal{U}_n = \int_{\dot{V}} [\mathbf{B}_n^\Delta]^\tau \boldsymbol{\sigma}_n d \dot{V} - \int_{\dot{V}} [\mathbf{N}_n^\Delta]^\tau \mathbf{F}_n d \dot{V} - \int_{s_1} [\mathbf{N}_n^\Delta]^\tau \mathbf{q}_n d \dot{\mathbf{S}}. \quad (3.47)$$

Друге співвідношення (3.45) приймає вигляд

$$d \mathbf{W}_n = \int_{\dot{V}} [\mathbf{B}_n]^\tau \mathbf{D}_n^{vp} \mathbf{e}_n^{vp} \Delta t_n d \dot{V} + \Delta \mathbf{Q}_n + \mathcal{U}_n. \quad (3.48)$$

Розглянемо алгоритм вирішення. Перші три пункти попереднього алгоритму повторюються без зміни і для вирішення пружно-в'язко-пластичних завдань. Тому починаємо з наступного пункту.

5. Організовується ітераційний процес за часом. На кожному часовому кроці виконуються наступні обчислення:

а. Визначається кількість ітерацій, через які коригується матриця жорсткості. Якщо необхідно виконати це на поточній ітерації, то заново обчислюються її елементи і записуються в допоміжний файл.

б. Із допоміжного файлу вводяться по сегментах елементи матриці жорсткості і виконується рішення фронтальним методом. Визначається $\Delta \boldsymbol{\theta}$ і $\boldsymbol{\theta}$.

с. Визначаються $\Delta \sigma_n$, $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma_n$, $\varepsilon_{n+1}^{vp} = \varepsilon_n^{vp} + \dot{\varepsilon}_n^{vp} \Delta t_n$, Δt_{n+1} . Визначається нев'язка $\boldsymbol{u}_n$ за (3.47) і $d\mathbf{W}_{n+1}$ за (3.48). При обчисленні цих величин враховується перерозподіл пластичних зон в тілі.

д. Виконується перевірка нерівності

$$\frac{\Delta t_{n+1} \sum \dot{\varepsilon}_{n+1}^{vp}}{\Delta t_l \sum \dot{\varepsilon}_l^{vp}} \leq \varepsilon_0, \quad (3.49)$$

де підсумовування проводиться по всіх точках Гаусса системи, які призначаються при чисельному інтегруванні; ε_0 – задана мала величина. Якщо воно не виконується, то проводиться повернення на пункт а.

е. Закінчується ітераційний процес.

ф. Проводиться запис у вихідний файл результатів рішення для кожного збільшення часу.

6. Закінчується цикл щодо приращень навантаження і заданого переміщення.

7. Виводиться висновок на дисплей інформації, ідентичної тій, що і в попередньому алгоритмі. Додатково виводяться епюри розвитку деформації в часі в заданих користувачем точках тіла і час їхньої стабілізації.

3.4. Використовувані програмні комплекси

Автор дисертації, для отримання чисельних результатів, застосовував програмні комплекси PLASTICA і PLAXIS, в яких використовувалися тільки деякі приватні результати з наведених вище теоретичних досліджень. Перший комплекс був розроблений професорами Гришиним В. А. і Гришиним А. В., був написаний на мові Сі#, реалізований і апробований у наступних роботах [41, 42, 43]. Так в ньому, на-

приклад, використовувалися лише функції навантаження Кулона-Мора, Боткіна, Мізеса і Треска-Сен-Венана. Для розширення області застосування цього комплексу автором дисертації були написані ряд підпрограм, які дозволили застосовувати в розрахунках функцію навантаження Писаренка-Лебедева та поліпшити інтерфейс користувача щодо введення вихідних даних і виведення результатів розрахунку. Можливості та обмеження програмного комплексу PLAXIS викладені в керівництві [195].

3.5. Висновки до розділу 3

1. Дискретизація області, займаної розширеною моделлю підпірної споруди для плоского завдання, виконана методом скінченних елементів. В якості скінченних елементів прийняті плоскі чотирьох-вузлові, восьми-вузлові і дев'яти-вузлові елементи. На межах ґрунтового масиву використовувалися плоскі нескінченні чотирьох-вузлові, п'яти-вузлові і шести-вузлові елементи.

2. Побудовано скінченно-елементну модель отриманих у розділі 2 нелінійних рівнянь, які визначають математичну модель у дискретних точках підпірної споруди і оточуючих її елементів. Вона представляє систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

3. Розроблено алгоритм вирішення цієї системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, в якому реалізовано ітераційний процес за методом Ньютона-Канторовича, де розроблено необхідну процедуру повернення вектора напруг в область, обмежену функцією навантаження. В якості функцій навантаження використовувалися умови: Кулона-Мора, Боткіна, Мізеса, Треска-Сен-Венана, Генієва і Писаренка-Лебедева.

4. Побудований алгоритм рішення реалізований професорами Гришиним В.А. і Гришиним А.В. у вигляді програмного комплексу PLASTICA, написаного на мові Сі#. Автором дисертації написано і налагоджено ряд підпрограм (умова Писаренка-Лебедева, поліпшений інтерфейс користувача щодо введення вихідних даних і виведення результатів розрахунку), які включені в цей комплекс.

5. Окремі можливості запропонованого алгоритму реалізовані в програмному комплексі PLAXIS.